DLR-IB-FA-BS-2019-58

Untersuchung analytischer Methoden zur Bestimmung der Spannungsverteilung in Faserverbundstrukturen mit einer kreisrunden Aussparung unter Zugbelastung

Bachelorarbeit

Jan-Lukas Stüven und Josef Koord

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

MH-FA-56-FB03_v1.3

Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

DLR-IB-FA-BS-2019-58

Untersuchung analytischer Methoden zur Bestimmung der Spannungsverteilung in Faserverbundstrukturen mit einer kreisrunden Aussparung unter Zugbelastung

Zugänglichkeit:

Stufe 2 DLR intern zugänglich

Braunschweig, *März, 2019*

Der Bericht umfasst: 121 Seiten

Abteilungsleiter:

Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne

Autoren:

Jan-Lukas Stüven

Betreuer:

Josef Koord

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

MH-FA-56-FB03_v1.3

BACHELORARBEITEN

aus dem Faserinstitut Bremen

Jan-Lukas Stüven

Untersuchung analytischer Methoden zur Bestimmung der Spannungsverteilung in Faserverbundstrukturen mit einer kreisrunden Aussparung unter Zugbelastung

Betreuer:

Prof. Dr.-Ing. Axel S. Herrmann
M. Sc. Anna Lang

In Zusammenarbeit mit:

M. Sc. Josef Koord
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Stade

Universität Bremen
FB Produktionstechnik

Aufgabenstellung

Trotz der Vielzahl alternativer Verbindungstechniken sind Bolzenverbindungen für die Gestaltung von Verbindungsstellen in Faserverbundstrukturen von höchster Relevanz. Am Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik des DLR wird der innovative Ansatz der lokalen Hybridisierung verfolgt, um das Leichtbaupotential von CFK-Strukturen auch in höchstbelasteten Verbindungsstellen vollständig auszunutzen. Die lokale Substitution einzelner CFK-Lagen durch Metalllagen erhöht dabei die Lochleibungsfestigkeit der Struktur im Verbindungsbereich und bietet durch den Wegfall von Laminataufdickungen und die Reduzierung der Bolzenanzahl ein großes Leichtbaupotential. Im Rahmen der Vorauslegung solcher Verbindungsstellen liefern analytische Tools qualitativ wertvolle Aussagen über das Potential bestimmter Technologien. Die Aussagekraft eines analytischen Tools hängt dabei maßgeblich von der Genauigkeit der ihr zugrundeliegenden Methoden ab. Für Bolzenverbindungen in Faserverbundstrukturen kommt der Beschreibung des Spannungszustandes in den Einzellagen des Laminats um eine belastete Bohrung eine besondere Bedeutung zu.

Aus diesem Grund sollen im Rahmen der Entwicklung eines Vorauslegungstools analytische Methoden zur Beschreibung der Spannungsverteilung aufgrund von Bypass-Lasten um eine belastete Bohrung untersucht werden. Dazu sind zunächst geeignete Methoden durch eine Literaturrecherche zu identifizieren und in Python-Code zu implementieren. Ferner sind im Rahmen von Open-Hole-Tension Versuchen ermittelte Oberflächenverformungen auszuwerten. Mit Hilfe dieser Daten sollen die analytisch bestimmten Spannungsverteilungen überprüft und die Methoden somit auf ihre Eignung für den Einsatz in einem analytischen Vorauslegungstool untersucht werden.

Die Arbeit gliedert sich in folgende Teilbereiche:

- Einarbeitung in die Thematik und Literaturrecherche zu analytischen Methoden
- Implementierung ausgewählter analytischer Methoden in Python und Durchführung einer Parameterstudie zur Charakterisierung der Methoden
- Bestimmung der Spannungsverteilung von OHT-Proben im Versuch mit Hilfe der optisch erfassten Oberflächenverformung (DIC)
- Vergleich der analytisch und experimentell bestimmten Spannungsverteilung
- Diskussion und Dokumentation der Ergebnisse

Urheberrechtliche Erklärung

Universität Bremen

Nachname **Stüven** Matrikelnr. **4227742**

Vorname/n **Jan-Lukas**

Diese Erklärungen sind in jedes Exemplar der Bachelor- bzw. Masterarbeit mit einzubinden.

Urheberrechtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.
Alle Stellen, die ich wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken entnommen habe, habe ich unter Angabe der Quellen als solche kenntlich gemacht.

Datum Unterschrift

Erklärung zur Veröffentlichung von Abschlussarbeiten

Die Abschlussarbeit wird zwei Jahre nach Studienabschluss dem Archiv der Universität Bremen zur dauerhaften Archivierung angeboten.
Archiviert werden:

1) Masterarbeiten mit lokalem oder regionalem Bezug sowie pro Studienfach und Studienjahr 10 % aller Abschlussarbeiten
2) Bachelorarbeiten des jeweils der ersten und letzten Bachelorabschlusses pro Studienfach und Jahr.

○ Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.

○ Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit nach frühestens 30 Jahren (gem. §7 Abs. 2 BremArchivG) im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.

◉ Ich bin nicht damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.

Datum Unterschrift

Sperrvermerk

Diese Arbeit, die nach der Prüfungs- und Studienordnung der Universität Bremen erstellt wurde, ist gemäß dem beigefügten Sperrvermerk zur Geheimhaltung für einen Zeitraum von drei Jahren ab dem Datum der Abgabe der Arbeit (18.03.2019) vertraulich zu behandeln.

Während dieses Zeitraums werden der Bericht und alle anderen Arbeitsergebnisse nur dem Faserinstitut Bremen e.V., dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt sowie den Prüfern zugänglich gemacht. Ausnahmen bedürfen der schriftlichen Genehmigung durch das Faserinstitut Bremen e.V. und dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt.

Datum:	Unterschrift Student
Jan-Lukas Stüven	

Datum:	Unterschrift 1. Prüfer
Prof. Axel S. Herrmann	

Korrespondenzadresse des industriellen Betreuers:

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
M. Sc. Josef Koord
Ottenbecker Damm 12
21684 Stade

Tel.: 0531 295-3592
E-Mail: josef.koord@dlr.de

Kurzfassung

Viele Bauteile enthalten Aussparungen deren Funktionen vielfältig sein können. Diese Aussparungen stellen kritische Bereiche dar, in denen es aufgrund des Kerbeffektes zu Spannungsüberhöhungen kommt. Für eine Vorauslegung der Struktur ist deshalb die Kenntnis der Spannungsverteilung in der Umgebung der Aussparung von großer Relevanz. In dieser Arbeit werden analytische Methoden zur Berechnung der Spannungsverteilung vorgestellt. In einer anschließenden Parameterstudie werden Einflussfaktoren analysiert und deren Wirkung auf die Spannungsverteilung untersucht. Es werden sowohl die Spannungen in einem Querschnitt, als auch in Kreisen um den Bohrungsmittelpunkt betrachtet. Zur Validierung der theoretischen Ergebnisse werden Versuche durchgeführt, deren Ergebnisse mit den analytischen Vorhersagen verglichen werden. Dies erfolgt sowohl in den Querschnitten und den Kreisen sowie für die gesamte Platte in einer zweidimensionalen Betrachtung.

Aus der Parameterstudie folgt die Erkenntnis, dass die äußere Belastung die Intensität der Spannungsüberhöhungen im gesamten Laminat beeinflusst, während der Bohrungsdurchmesser den Gradient bestimmt, sodass es bei zunehmendem Bohrungsdurchmesser zu geringeren Spannungsabnahmen kommt. Aus dem qualitativen Vergleich der zweidimensionalen Verteilungen stellt sich die Methode von Soutis und Filiou als die Genauste der Untersuchten heraus.

Schlüsselwörter:

- Spannungsverteilung
- Anisotrope Platten
- Analytische Methoden
- Digitale Bildkorrelation
- Open Hole Tension

Abstract

Many components contain cutouts which provide various functionalities. These cutouts represent critical areas where high stress concentrations can be found as a result of the notch. In case of preliminary design the knowledge of the stress distribution is therefore of high relevance. In this work analytical methods are presented to determine this stress distribution. Following that a parameter study is conducted to determine the influencing factors and their effect on the distribution. The stresses will be analysed in cross sections as well as circles around the cutout. To validate the theoretical results, experimental data and the analytical predictions will be compared. This will be done for the cross sections and the circles as well as for the whole plate.

The parameter study finds, that the external load influences the intensity of the stress concentration in the whole laminate, whereas the hole diameter determines the gradient so that the steepness of the stress reduction decreases with growing diameter. The qualitative comparison of the two-dimensional stress distributions shows that Soutis and Filious method produces the best agreement with respect to all methods.

Keywords:

- Stress distribution
- Anisotropic plates
- Analytical methods
- Digital Image Correlation
- Open Hole Tension

X

X

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenstellung I

Urheberrechtliche Erklärung III

Sperrvermerk V

Kurzfassung VII

Abstract IX

Inhaltsverzeichnis XI

Abbildungsverzeichnis XIII

Tabellenverzeichnis XIX

Verzeichnis der Formelzeichen XXIII

1 Einleitung 1

2 Historie und Überblick verschiedener Kontributionen 3

3 Theoretischer Hintergrund 5

3.1 Mechanik von Faserverbundwerkstoffen . . . 5
3.1.1 Spannungszustand . . . 7
3.1.2 Verzerrungszustand . . . 10
3.1.3 Stoffgesetz . . . 11
3.1.4 Klassische Laminattheorie . . . 14
3.2 Koordinatentransformation . . . 15
3.3 Genereller Spannungszustand einer homogenen Platte . . . 17
3.4 Genereller Ausdruck der Spannungsfunktion . . . 18

4 Analytische Spannungsverteilungen 21

4.1 Berechnung für das Laminat . . . 21
4.1.1 Spannungsverteilung nach Soutis und Filiou . . . 21
4.1.2 Spannungsverteilung nach Ukadgaonker und Rao . . . 23
4.1.3 Spannungsverteilung nach Lekhnitskii . . . 26
4.2 Vorgehensweise zur Berechnung der Spannungsverteilung . . . 29

5 Parameterstudie **31**
5.1 Dimensionslose Darstellung . . . 31
5.2 Einfluss des Bohrungsdurchmessers . . . 33
5.3 Einfluss der äußeren Belastung . . . 35
5.4 Einfluss des Materials . . . 36

6 Spannungen am Bohrungsrand und in Einzellagen **41**
6.1 Untersuchung der Spannungsverteilung am Bohrungsrand . . . 41
6.2 Spannungsverteilung in den Einzelschichten . . . 43

7 Open Hole Tension Versuche **51**
7.1 Materialien und Fertigung . . . 51
7.2 Versuchsaufbau und -durchführung . . . 53
7.3 Hintergrund DIC Methode . . . 54
7.4 Auswertung mit GOM . . . 55

8 Vergleich analytischer und experimenteller Ergebnisse **57**
8.1 Spannungsverteilung im 0°−Laminat . . . 57
8.2 Spannungsverteilung im 90°−Laminat . . . 65
8.3 Spannungsverteilung im QI−Laminat . . . 72
8.4 Korrekturfaktor für endliche Platten . . . 79

9 Zusammenfassung und Ausblick **81**
9.1 Zusammenfassung . . . 81
9.2 Ausblick . . . 82

Literaturverzeichnis **85**

A Anhang **89**

Abbildungsverzeichnis

1.1 Darstellung einer Bolzenverbindung [5] 2

3.1 Bestandteile eines Faserverbundlaminates mit mehreren Lagen unterschiedlicher Faserorientierung (angepasst aus [19]) 5

3.2 Darstellung des um den Winkel θ gedrehten Lagenkoordinatensystems (lokal; rot) und des kartesischen bzw. des Laminatkoordinatensystems (global; schwarz) 6

3.3 Darstellung von Spannungskompenten am Beispiel eines Würfel in kartesischen Koordinaten 9

3.4 Linear-elastisches Materialverhalten von FVW und Metalle für kleine Dehnungen [24] 11

3.5 Darstellung einer elastischen, homogenen, anisotropen und flacher Platte mit konstanter Dicke h im kartesischen Koordinatensystem mit Mitellebene in der x-y-Ebene [7] 17

4.1 Problemdarstellung einer Platte mit kreisrunder Aussparung unter Zugbelastung in x- und y-Richtung mit Biaxialitätsfakor λ [16] 22

4.2 Darstellung der Problemkonfiguration und des Superpositionansatzes aus: Platte ohne Aussparung mit äußerer Last (a), Platte mit Aussparung ohne äußere Last (b), Ausgangssituation (c), [14] 23

4.3 Unendlich große Platte mit elliptischer Aussparung und Dicke h unter Belastung durch äußere Kräfte X_n und Y_n; P_x und P_y sind die Komponenten der resultierenden Kraft [7] 26

4.4 Problemdarstellung der unendlichen großen Platte mit angreifender Spannung p unter dem Winkel φ in Bezug auf die x-Achse [7] 28

4.5 Schrittweises Vorgehen zur Bestimmung der Spannungsverteilung im Laminat bzw. in den Einzelschichten 30

5.1 Geometrie einer Open-Hole-Tension-Probe mit Durchmesser d, Weite w, Länge l und Winkel θ; die Zugbelastung erfolgt in x-Richtung (links); Querschnitt der Platte und Bohrungsrand für die später die Spannungskurven dargestellt werden (rechts) 31

5.2 Dimensionsloser Vergleich der drei Methoden am Beispiel eines Querschnittes durch ein QI-Laminates aus M21/T700GC unter dem Winkel $\theta = 90°$ 32

5.3 Einfluss der Variation des Bohrungsdurchmessers auf die Kurvenverläufe aller Methoden für ein QI-Laminat aus M21/T700GC mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ unter konstanter äußerer Last (gepunktet: $d = 20\,\mathrm{mm}$, gestrichelt: $d = 10\,\mathrm{mm}$, durchgezogen: $d = 5\,\mathrm{mm}$) 34

5.4 Dimensionslose Darstellung der Spannung in Zugrichtung in einem isotropen Laminat für unterschiedliche Bohrungsdurchmesser; links die Darstellung aus der Literatur [27] wobei $\sigma_y = \sigma_{xx}$, $\sigma_\infty = p$ und $X = r$; rechts die Spannungsverläufe von Soutis . . . 35
5.5 Einfluss der Variation der äußeren Last auf die Kurvenverläufe aller Methoden für ein QI-Laminat aus M21/T700GC mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und konstantem Bohrungsdurchmesser (gepunktet: $p = 300\,\mathrm{MPa}$, gestrichelt: $p = 150\,\mathrm{MPa}$, durchgezogen: $p = 50\,\mathrm{MPa}$) . . . 36
5.6 Einfluss des Laminataufbaus auf die Kurvenverläufe der Spannungsverteilung aller Methoden mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$, konstantem Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ und normierter Last (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii) . . . 37
5.7 Vergleich der Spannungsverläufe von Soutis (links) mit denen von Ukadgaonker (rechts) für verschiedene Laminataufbauten . . . 38
5.8 Vergleich der Methoden für spezifische Laminataufbauten; oben die reinen UD-Laminate und unten die gemischten Laminate mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$, konstantem Bohrungsdurchmessser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter äußerer Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$. 39
6.1 Spannungsverteilung um den Bohrungsrand eines 0°- (oben) und eines QI-Laminates (unten) mit Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter der konstanten Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$; alle Methoden bilden den gleichen Verlauf ab . . . 42
6.2 Spannungsverteilung auf einem Kreis mit Durchmesser $D = 12\,\mathrm{mm}$ eines 0°- (oben) und eines QI-Laminates (unten) der Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ mit Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter der konstanten Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ . . . 42
6.3 Spannungsverteilung um den Bohrungsrand eines QI-Laminates mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ (Überlagerung aller Methoden) . . . 43
6.4 Vergleich der Spannungsverläufe aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ in einem Kreis um den Ursprung mit Durchmesser $D = 12\,\mathrm{mm}$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii) . . . 44
6.5 Vergleich der Spannungsverläufe aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ im Querschnitt unter $\theta = 90°$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii) . . . 45
6.6 Spannungsverteilung σ_{yy} um den Bohrungsrand eines QI-Laminates mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ (Überlagerung aller Methoden) . . . 46

6.7 Vergleich der Spannungsverläufe σ_{yy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60$ mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa in einem Kreis um den Ursprung mit Durchmesser $D = 12$ mm (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii) 46
6.8 Vergleich der Spannungsverläufe σ_{yy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60$ mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa im Querschnitt unter $\theta = 90°$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii) 47
6.9 Spannungsverteilung τ_{xy} um den Bohrungsrand eines QI-Laminates mit Weite $w = 60$ mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa (Überlagerung aller Methoden) 48
6.10 Vergleich der Spannungsverläufe τ_{xy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60$ mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa in einem Kreis um den Ursprung mit Durchmesser $D = 12$ mm (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii) 48
6.11 Vergleich der Spannungsverläufe τ_{xy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60$ mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa im Querschnitt unter $\theta = 45°$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii) 49
7.1 Draufsicht der Bohrung (links) und Aufnahme unter einem Winkel von 30° (rechts) 52
7.2 Herstellungsprozess der in den Versuchen untersuchten OHT-Proben 52
7.3 Stochastisches Muster auf Probenoberflächen (links), Eingespannte Probe (mitte) und gesamter Versuchsaufbau mit ARAMIS System im Vordergrund (rechts) 53
7.4 Bruchbilder eines 90°- Laminates (links) und eines QI-Laminates (rechts) 54
7.5 Stochastisches Muster einer Probe (links) mit eingegrenzten Bereichen (Facetten; rechts) [28] 54
7.6 Unverformte (links) und verformte Probe (rechts) [28] 55
8.1 Dehnungsverteilung ε_{xx} in einem 0°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 306$ MPa und Geometrie aus Tabelle 7.2 58
8.2 Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem 0°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 223$ MPa und Geometrie aus Tabelle 7.2 59
8.3 Dehnungsverteilung ε_{xy} in einem 0°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den Dehnungen γ_{xy} der analytischen Methoden; $p = 223$ MPa und Geometrie aus Tabelle 7.2 60
8.4 Gegenüberstellung der Dehnungsverteilungen γ_{xy} in einem 0°-Laminat von Soutis aus Abbildung 8.3 und der Verteilung aus dem Versuch 60

8.5 Vergleich der analytischen Methoden mit Datenpunkten aus den Versuchen im Querschnitt eines 0°-Laminates unter $\theta = 90°$ mit $p = 306\,\mathrm{MPa}$ und der Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 61
8.6 Spannungsverteilung σ_{xx} entlang eines Kreises mit $D = 7,04\,\mathrm{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,37\,\mathrm{mm}$) in einem 0°-Laminat mit $w = 32,04\,\mathrm{mm}$ und $p = 306\,\mathrm{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen . . . 63
8.7 Spannungsverteilung σ_{yy} entlang eines Kreises mit $D = 7,04\,\mathrm{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,37\,\mathrm{mm}$) in einem 0°-Laminat mit $w = 32,04\,\mathrm{mm}$ und $p = 306\,\mathrm{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen . . . 64
8.8 Dehnungsverteilung ε_{xx} in einem 90°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 33\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 65
8.9 Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem 90°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 66
8.10 Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem 90°-Laminat den analytischen Methoden; $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 67
8.11 Dehnungsverteilung ε_{xy} in einem 90°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den Dehnungen γ_{xy} der analytischen Methoden; $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 68
8.12 Gegenüberstellung der Dehnungsverteilungen γ_{xy} in einem 90°-Laminat von Soutis aus Abbildung 8.11 und der Verteilung aus dem Versuch . . . 68
8.13 Vergleich der analytischen Methoden mit Datenpunkten aus den Versuchen im Querschnitt eines 90°-Laminates unter $\theta = 90°$ mit $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und der Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 69
8.14 Spannungsverteilung σ_{xx} entlang eines Kreises mit $D = 6,95\,\mathrm{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,34\,\mathrm{mm}$) in einem 90°-Laminat mit $w = 32,03\,\mathrm{mm}$ und $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen . . . 70
8.15 Spannungsverteilung σ_{yy} entlang eines Kreises mit $D = 6,95\,\mathrm{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,34\,\mathrm{mm}$) in einem 90°-Laminat mit $w = 32,03\,\mathrm{mm}$ und $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen . . . 71
8.16 Dehnungsverteilung ε_{xx} in einem QI-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 72
8.17 Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem QI-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 73
8.18 Dehnungsverteilung ε_{xy} in einem QI-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den Dehnungen γ_{xy} der analytischen Methoden; $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2 . . . 74

8.19 Gegenüberstellung der Dehnungsverteilungen γ_{xy} in einem QI-Laminat von Soutis aus Abbildung 8.18 und der Verteilung aus dem Versuch 75
8.20 Vergleich der analytischen Methoden mit Datenpunkten aus den Versuchen im Querschnitt eines QI-Laminates unter $\theta = 90°$ mit $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und der Geometrie aus Tabelle 7.2 76
8.21 Spannungsverteilung σ_{xx} entlang eines Kreises mit $D = 7,26\,\mathrm{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,35\,\mathrm{mm}$) in einem QI-Laminat mit $w = 32,05\,\mathrm{mm}$ und $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen 77
8.22 Spannungsverteilung σ_{yy} entlang eines Kreises mit $D = 7,26\,\mathrm{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,35\,\mathrm{mm}$) in einem QI-Laminat mit $w = 32,05\,\mathrm{mm}$ und $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen 78
8.23 Vergleich der Spannungsverläufe für unterschiedliche Bohrungsdurchmesser an einem QI-Laminat mit Weite $w = 40\,\mathrm{mm}$ unter der äußeren Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ und unter Verwendung des Geometriekorrekturfaktors (gepunktet: $d = 20\,\mathrm{mm}$, gestrichelt: $d = 10\,\mathrm{mm}$, durchgezogen: $d = 5\,\mathrm{mm}$) 80
A.1 Dimensionsloser Vergleich von Spannungsverteilungen mehrerer analytischer Methoden an einem rein aus 0°-Lagen bestehenden Laminat des Materials M21/T700GC 89
A.2 Einfluss unterschiedlicher Genauigkeiten der komplexen Parameter eines QI-Laminates auf die Spannungsverläufe von Soutis 89
A.3 Dehnungen ε_{xx} im Querschnitt eines 0°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate . 90
A.4 Dehnungen ε_{yy} im Querschnitt eines 0°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate . 90
A.5 Dehnungen ε_{xx} im Querschnitt eines 90°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate 91
A.6 Dehnungen ε_{yy} im Querschnitt eines 90°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate 91
A.7 Dehnungen ε_{xx} im Querschnitt eines QI-Laminates; erstellt mit GOM Correlate 92
A.8 Dehnungen ε_{yy} im Querschnitt eines QI-Laminates; erstellt mit GOM Correlate 92
A.9 Exemplarischer Querschnitt durch ein 0°-Laminat in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht) 93
A.10 Kreis um die Bohrung eines 0°-Laminates mit Datenpunkten in 30°-Schritten in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht) 93
A.11 Exemplarischer Querschnitt durch ein 90°-Laminat in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht) 94
A.12 Kreis um die Bohrung eines 90°-Laminates mit Datenpunkten in 30°-Schritten in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht) . . 94
A.13 Exemplarischer Querschnitt durch ein QI-Laminat in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht) 95
A.14 Kreis um die Bohrung eines QI-Laminates mit Datenpunkten in 30°-Schritten in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht) 95

Tabellenverzeichnis

3.1 Vergleich von Materialeigenschaften zwischen gängigen Metallen und einem quasi-isotropen kohlefaserverstärkten Kunststoff [20] 6
5.1 Vergleich der Spannungen σ_{xx} für ein QI-Laminat belastet durch die konstante Spannung $p = 150\,\mathrm{MPa}$ für verschiedene Bohrungsdurchmesser und r/R Verhältnisse 34
5.2 Vergleich der Spannungen für ein QI-Laminat mit konstantem Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter variierender Belastungen und r/R Verhältnissen 36
5.3 Laminataufbauten der zu untersuchenden OHT-Proben (St = Stahl) 37
5.4 Integrale der über den Querschnitt verteilten Spannungen in N/mm; in Klammern die auf die Querschnitsslänge bezogene mittlere Spannung $\overline{\sigma}_{xx}$ in MPa 39
7.1 Materialeigenschaften einer UD-Lage aus dem Material M21/T700GC und einer isotropen Stahllage aus dem Material St 1.4310 [5] 51
7.2 Eigenschaften der in den Zugversuchen untersuchten OHT-Proben 52
8.1 Dehnungen verschiedener Punkte entlang eines Querschnittes unter $\theta = 90°$ in einem 0°-Laminat mit $p = 306\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung; Vergleich mit den aus Tabellen abgelesenen Werten für die Kurven von Soutis und Ukadgaonker 62
8.2 Dehnungen auf einem Kreis ($D = 7{,}04\,\mathrm{mm}$) um die Bohrung ($d = 6{,}37\,\mathrm{mm}$) in einem 0°-Laminat mit $w = 32{,}04\,\mathrm{mm}$ und $p = 306\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung 64
8.3 Dehnungen verschiedener Punkte entlang eines Querschnittes unter $\theta = 90°$ in einem 90°-Laminat mit $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung; Vergleich mit den aus Tabellen abgelesenen Werten für die Kurven von Soutis und Ukadgaonker 69
8.4 Dehnungen auf einem Kreis ($D = 6{,}95\,\mathrm{mm}$) um die Bohrung ($d = 6{,}34\,\mathrm{mm}$) in einem 90°-Laminat mit $w = 32{,}03\,\mathrm{mm}$ und $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung 72
8.5 Dehnungen verschiedener Punkte entlang eines Querschnittes unter $\theta = 90°$ in einem QI-Laminat mit $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung; Vergleich mit den aus Tabellen abgelesenen Werten für die Kurven von Soutis und Ukadgaonker 76
8.6 Dehnungen auf einem Kreis ($D = 7{,}26\,\mathrm{mm}$) um die Bohrung ($d = 6{,}35\,\mathrm{mm}$) in einem QI-Laminat mit $w = 32{,}05\,\mathrm{mm}$ und $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung 78

8.7 Berechnung einiger Korrekturfakoren für verschiedene Verhältnisse aus Plattenweite zu Bohrungsdurchmesser 79

Verzeichnis der Formelzeichen

Abkürzungen, Begriffe

CLT	Klassische Laminattheorie (Classical Lamination Theory)
DIC	Digitale Bildkorrelation (Digital Image Correlation)
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
ESZ	Ebener Spannungszustand
FL	Flügellaminat
FVW	Faserverbundwerkstoff
FWC	Geometriekorrekturfaktor (Final Width Correction)
HFL	Hybridisiertes Flügellaminat
OHT	Open Hole Tension
QI	Quasi-isotrop
SAW	Standardabweichung
SCF	Stresskonzentrationsfaktor
UD	Unidirektional

Symbole, Lateinische Buchstaben

a	Komplexer Parameter
b	Komplexer Parameter
g	Erdbeschleunigung
h	Laminathöhe / -dicke
i	Imaginäre Zahl
k	Materialparameter Lekhnitskii
l	Länge
n	Materialparameter Lekhnitskii
p	Angreifende Spannung in x-Richtung
q	Angreifende Spannung in y-Richtung
r	Aktueller Radius
s	Plattenkontur
u, v, w	Verschiebung in kartesische Koordinatenrichtungen
x, y, z	Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems
z	Komplexe Zahl
A_0, A, B_0, B	Parameter Lekhnitskii
A	Nachgiebigkeit
B^*	Komplexer Parameter Ukadgaonker und Rao
B'^*	Komplexer Parameter Ukadgaonker und Rao
C'^*	Komplexer Parameter Ukadgaonker und Rao
C	Steifigkeit
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft / Spannungsfunktion
G	Schubmodul

K	Komplexer Parameter Ukadgaonker und Rao
P	Komponenten der resultierenden Kraft
Q	Reduzierte Steifigkeit
R	Radius
T	Transformationsmatrix
X_n, Y_n, Z_n	Äußere Last

Symbole, Griechische Buchstaben

α_0, β_0	Materialparameter
α, β	Verzerrungswinkel
α, γ	Realanteile der komplexen Parameter
β, δ	Imaginäranteile der komplexen Parameter
β	Lastangriffswinkel Ukadgaonker und Rao
γ	Scherung
ϵ	Dehnung
ζ	Komplexe Zahl der komplexen Ebene $\zeta = \rho\, e^{i\theta}$
θ	Drehwinkel
ϑ	Zylinderkoordinate Lekhnitskii
κ	Krümmung
λ	Biaxialitätsfaktor
μ	Komplexer Parameter erster Ordnung
ν	Querkontraktionszahl
ρ	Dichte
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung
φ	Lastangriffswinkel Lekhnitskii
ϕ	Spannungsfunktion
ψ	Spannungsfunktion
ω	Abbildungsfunktion

Indizes

$(\ \ )_{ijkl}$	Laufvariablen
$(\ \ )_n$	Normalenrichtung
$(\ \ )_x$, $(\ \ )_{xx}$	x-Richtung
$(\ \ )_y$, $(\ \ )_{yy}$	y-Richtung
$(\ \ )_z$, $(\ \ )_{zz}$	z-Richtung
$(\ \ )_\theta$	Eigenschaft um Winkel θ gedreht
$(\ \ )_1$, $(\ \ )_{11}$	Faserrichtung (meist in x-Richtung)
$(\ \ )_2$, $(\ \ )_{22}$	Senkrecht zur Faserrichtung (meist in y-Richtung)
$(\ \ )_3$, $(\ \ )_{33}$	Senkrecht zur Faserrichtung (meist in z-Richtung)

$\overline{(\quad)}$	Durchschnittlicher Wert / Gedrehte reduzierte Steifigkeit
$(\quad)'$	Transformiert / Verzerrt
$(\quad)^k$	Eigenschaft der k-ten Lage
$(\quad)^0$	Eigenschaft der Mittellage
$[\quad]^{-1}$	Inverse Matrix

1 Einleitung

Zurzeit stellen Leichtmetalle, wie Aluminium, einen deutlich größeren Marktanteil an Leichtbauwerkstoffen dar, als Faserverbundwerkstoffe (FVW) [1], was hauptsächlich an der kurzen Entwicklungsgeschichte von FVW liegt. Faktoren, die einem großflächigeren Einsatz von FVW noch gegenüber stehen, sind zum Beispiel die hohen Werkstoffkosten, der Fertigungsaufwand und die Rezyklierbarkeit [2]. Nichtsdestotrotz werden FVW vor allem in der Luft- und Raumfahrt eingesetzt, da Gewichtseinsparungen besonders in diesem Bereich zu hohen Effizienzgewinnen in Form von geringerem Treibstoffverbrauch führen [3]. FVW bergen aufgrund ihrer einzigartigen gewichtsspezifischen Eigenschaften großes Potential für die Anwendung im Leichtbau, der es sich zur Aufgabe macht, das Strukturgewicht einer Konstruktion „[...]*aus funktionalen oder ökonomischen Gründen* [...] *zu reduzieren oder zu minimieren, ohne die Tragfähigkeit, die Steifigkeit oder andere Funktionen der Konstruktion zu schmälern*“ [4].

Ein Bereich, der viel Forschungsbedarf birgt, ist die Verbindungstechnik von FVW mit diversen Verbundwerkstoffen oder in Kombination mit anderen Materialien (Multi-Material-Design) [1]. Das Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik des Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrts (DLR) beschäftigt sich zum Beispiel mit Materialhybridisierung an Bolzenverbindungsstellen in Faserverbundstrukturen. Dabei wird anstatt einer Laminataufdickung im Verbindungsbereich, wie es üblicherweise durchgeführt wird, eine Substitution von einzelnen Faserverbundlagen durch Metalllagen durchgeführt und somit die Lochleibungsfestigkeit erhöht. Als Resultat daraus kann die nötige Bolzenanzahl reduziert werden. Zusätzlich kann eine durch dünnere Laminate ermöglichte kompaktere Bauweise zu Gewichtsreduktion führen.

Im Rahmen einer Vorauslegung für eine solche Bolzenverbindung (vgl. Abbildung 1.1) ist die Kenntnis der Spannungsverteilungen in den einzelnen Lagen und im gesamten Laminat von großer Bedeutung. Die Spannungsverteilung hängt von äußeren Lasten ab und kann durch Superposition von Teillösungen verschiedener Lastverteilungen approximiert werden. Zu den Teilbelastungen gehören die Fälle des am Bohrungsrand durch den Bolzen belasteten, als auch des ausschließlich durch äußere Kräfte belasteten Laminates (Bypass-Lasten). Diese Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit den letzteren genannten Lasten.

In einem kurzen Überblick sollen die Inhalte der folgenden Abschnitte aufgezeigt werden. Nach einer Darstellung des theoretischen Hintergrundes werden mehrere Methoden vorgestellt, welche die eben erwähnte Spannungsverteilung in Laminaten mit einer kreisrunden Aussparung analytisch bestimmen. Die Bohrung wird dabei stets als unbelastet angenommen, sodass nur Bypass-Lasten betrachtet werden. Anschließend wird eine Parameterstudie durchgeführt, in der die Einflüsse der Parameter auf die Spannungsverteilung in einem Laminatquerschnitt untersucht werden. Danach werden Spannungsverteilungen um den Bohrungsrand und entlang Kreisen mit größerem Durchmesser als dem der Bohrung analysiert sowie die Aufteilung der Spannungen auf die einzelnen Lagen untersucht. Um die Güte der Methoden zu bestimmen, erfolgt nach der Vorstellung der analytischen Ergebnisse ein Vergleich mit experimentellen Versuchsdaten. Es werden verschiedene Laminataufbauten getestet und mit Hilfe optischer Messmethoden ausgewertet. Abschließend erfolgt eine Diskussion der Ergebnisse und eine Zusammenfassung der Ergebnisse sowie ein Ausblick.

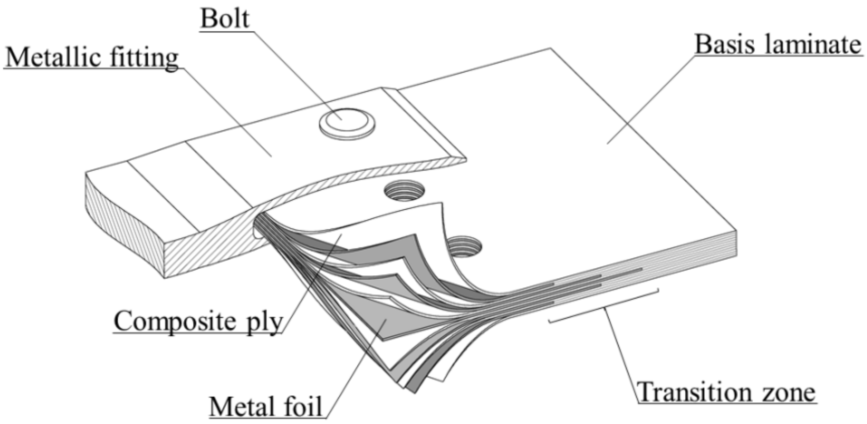


Abbildung 1.1: Darstellung einer Bolzenverbindung [5]

2 Historie und Überblick verschiedener Kontributionen

In der Praxis werden drei gängige Methoden zur Bestimmung der Spannungsverteilung in Platten verwendet. Dazu gehören zum einen die Berechnung über analytische Methoden, wie sie in dieser Arbeit vorgestellt werden, und zum anderen die Berechnung über Finite Elemente Methoden (FEM) und semi-analytische Methoden, welche einige analytische Gleichungen in die FEM-Modelle integrieren, um den Rechenaufwand zu senken [6]. Die Stärken von analytischen Methoden liegen vor allem in der schnellen Analyse sowie der hohen Genauigkeit und eignen sich somit gut zur Vorauslegung von Strukturen [6].

Die Grundlagen zur Berechnung von Spannungen und Verzerrungen in elastischen Platten werden von Airy, Maxwell, Goursat, Michell, Kolosov, Marguerre und Muskelishvili gelegt. Deren Kontributionen beschäftigen sich vor allem mit Spannungsfunktionen, der komplexen Darstellungsweise und Abbildungsfunktionen zum Transformieren von Geometrien in die komplexe Ebene [6].

Die Basis für viele analytische Methoden bildet Lekhnitskii im Jahr 1957 (1968 als englische Übersetzung) [6] mit seiner Arbeit zu anisotropen Platten [7]. In seinem Werk baut Lekhnitskii auf der Arbeit von Muskhelishvili auf [8], die sich mit generellen zweidimensionalen Verzerrungsproblemen isotroper Platten beschäftigt. 1977 beschäftigt sich Tang nach dem Vorbild von Lekhnitskii ebenfalls mit Spannungen in Platten aus Verbundmaterialien mit elliptischen Aussparungen [9], weitet die Lösung allerdings auf die gesamte Platte aus. De Jong [10] nimmt im Jahr 1981 eine Modifikation von Lekhnitskiis Lösung vor, indem er die Berechnung der Spannungsverteilung auf orthotropen Laminate mit rechteckigen und quadratischen Aussparungen erweitert. Vier Jahre später präsentiert die Engineering „Sciences Data Unit“ Lösungen [11] zur Berechnung der Spannungsverteilung in unendlich großen orthotropen Platten mit kreisrunden Aussparungen [6]. Lösungen für dreieckige Aussparungen werden 1991 von Daoust und Hoa veröffentlicht [12]. Gao löst in seiner Arbeit aus dem Jahr 1996 [13] das Problem der biaxialen Belastung, indem er den Biaxialitätsfaktor einführt, sodass keine Superposition aus uniaxialen Belastungen mehr durchgeführt werden muss. Im Jahr 2000 veröffentlichen Ukadgaonker und Rao [14] ihre Ergebnisse über Spannungen in unendlich großen Platten mit beliebig geformten Aussparungen unter uniaxialer und biaxialer Belastung. Soutis und Filiou beschäftigen sich 1995 zunächst mit einer genauen Lösung für die Spannungsverteilung in unendlich großen Platten [15] und drei Jahre später mit einer Approximation der genauen Lösung [16], um den Rechenaufwand zu verringern. 2004 leitet Echavarria in seiner Doktorarbeit [17] ebenfalls Lösungen für den Fall einer kreisrunden Aussparung her. Einen vergleichsweise neuen Betrag liefern Zhang et al. 2016 in ihrer Arbeit über die Analyse von Spannungen in einzelnen Laminatlagen [18].

Lekhnitskii bildet nicht die einzige Basis für analytische Methoden. Eine Weitere wird von Stroh und Eshelby et al. gelegt [6], welche auf der Tensorschreibweise basiert, jedoch in dieser Arbeit nicht betrachtet wird, da sie weniger verbreitet ist und den Umfang der Arbeit übersteigen würde.

Im Folgenden werden diejenigen der oben aufgezählten Methoden untersucht, welche zur Berechnung der Spannungsverteilung um kreisrunde Aussparungen geeignet sind, nämlich die von Lekhnitskii [7], Ukadgaonker und Rao [14], Soutis und Filiou [15], Tang [9], Zhang et al. [18] und Echavarria [17]. Die Untersuchung, welche nach der Einführung der Methoden durchgeführt wird, erfolgt in Laminatquerschnitten (vgl. Abschnitt 5 Abschnitt 8 für Vergleich mit Experimenten), Kreisen um den Bohrungsmittelpunkt (vgl. Abschnitt 6 und Abschnitt 8 für Vergleich mit Experimenten) sowie zweidimensional für das gesamte Laminat (vgl. Abschnitt 8).

3 Theoretischer Hintergrund

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen der Elastostatik hergeleitet, mit Hilfe derer später die Formeln zur Bestimmung der Spannungsverteilung in anisotropen Platten mit einer kreisrunden Aussparung formuliert werden können. Außerdem werden weitere notwendige Gleichungen eingeführt und die Spannungsfunktion definiert.

3.1 Mechanik von Faserverbundwerkstoffen

FVW bestehen aus einem Verbund mehrerer Materialien. Der Vorteil dieses Designkonzeptes ist, dass die Eigenschaften des FVW für eine spezifische Anwendung maßgeschneidert werden können [19]. Faserverbundbauteile bestehen zumeist aus Laminaten, also gestapelten Einzellagen beliebiger Orientierung, die wiederum aus in Harz eingebetteten Fasern bestehen (vgl. Abbildung 3.1).

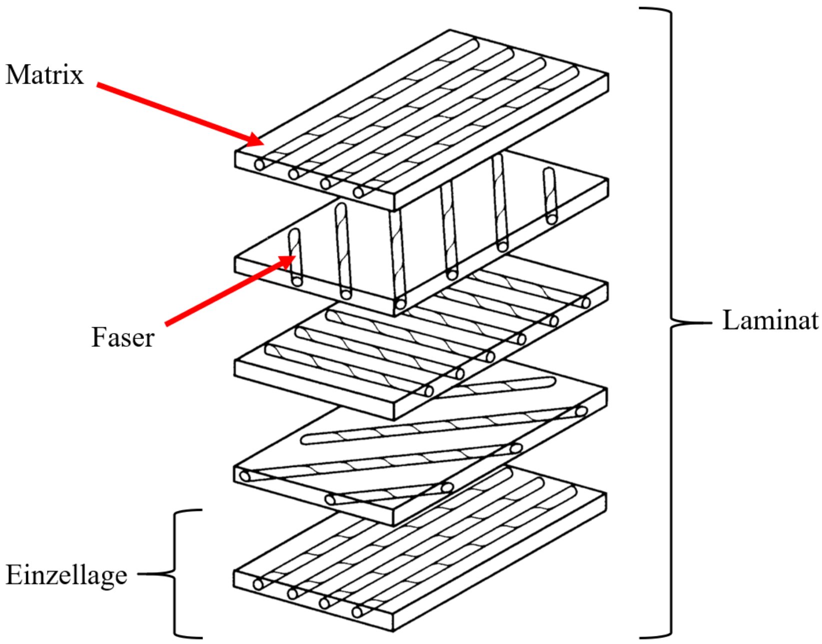


Abbildung 3.1: Bestandteile eines Faserverbundlaminates mit mehreren Lagen unterschiedlicher Faserorientierung (angepasst aus [19])

Beurteilt man die Steifigkeit (Elastizitätsmodul bzw. Young'scher Modulus) von Materialien über die spezifische Steifigkeit, also auf die Materialdichte bezogen, zeigt sich das hervorragende Leichtbaupotential von FVW. Tabelle 3.1 zeigt eine Gegenüberstellung der Materialeigenschaften von gängigen Metallen und einem quasi-isotropen (QI) kohlefaserverstärkten Kunststoff mit 50% Faservolumengehalt (CFK). Anhand der spezifischen Steifigkeiten wird deutlich, dass die Eigenschaften von FVW in den meisten Fällen für leichte und hochsteife Strukturen besser geeignet sind als die von Metallen.

Tabelle 3.1: Vergleich von Materialeigenschaften zwischen gängigen Metallen und einem quasi-isotropen kohlefaserverstärkten Kunststoff [20]

Material	Dichte ρ [$^g/_{cm^3}$]	E-Modul [GPa]	Spezifische Steifigkeit $^E/_{\rho g}$ [km]
CFK	1,5	88	5900
Stahl	7,8	210	2700
Titan	4,5	110	2400
Aluminium	2,8	75	2700

Die Matrix ist das strukturgebende Element eines FVW und hat zwei Hauptaufgaben. Zum einen sorgt sie für die Positionierung, Strukturierung und den Schutz der Fasern, zum anderen für die Krafteinleitung einer äußeren Last [19]. Generell ist die Steifigkeit der Matrix sehr viel niedriger als die der Faser [19]. Die Materialeigenschaften des Laminates können durch sogenannte Mischungsregeln approximiert werden, in denen die Eigenschaften der Komponenten über den Faservolumengehalt in Beziehung gesetzt werden.

Der Fasercharakter eines FVW sorgt dafür, dass die Materialeigenschaften von der Betrachtungsrichtung abhängen, also anisotrop sind. Eine Einzellage, in der alle Fasern mit der gleichen Orientierung ausgerichtet sind, wird unidirektionale Schicht (UD-Schicht) genannt. Die Materialeigenschaften werden dann in Faserrichtung (1-Richtung) und senkrecht dazu (2- bzw. 3-Richtung) unterschieden.

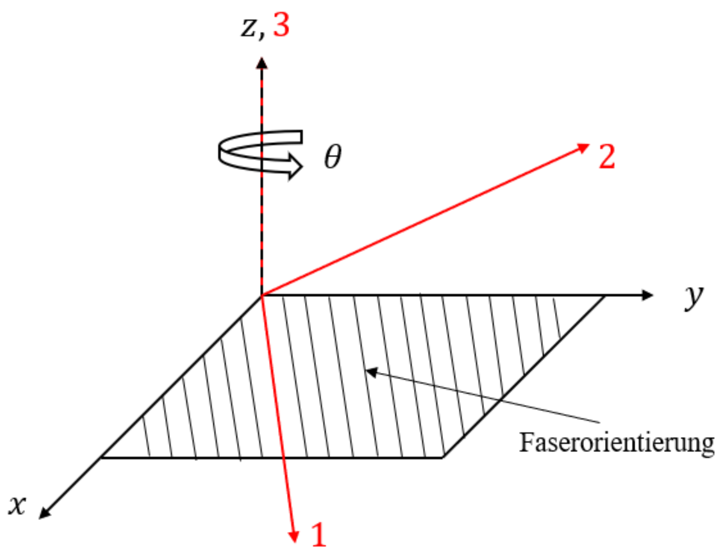


Abbildung 3.2: Darstellung des um den Winkel θ gedrehten Lagenkoordinatensystems (lokal; rot) und des kartesischen bzw. des Laminatkoordinatensystems (global; schwarz)

Die eben genannten Achsen bilden zusammen das Lagenkoordinatensystem, welches nicht mit dem kartesischen Koordinatensystem übereinstimmen muss. Das Laminatkoordinatensystem (also der Zusammenschluss aller Lagen) wird in den meisten Fällen wie das kartesische

Koordinatensystem ausgerichtet, um nicht zwischen den einzelnen Systemen transformieren zu müssen. Abbildung 3.2 zeigt ein Beispiel einer gegenüber dem kartesischen Koordinatensystem um den Winkel θ verdrehten UD-Schicht.

Aufgrund der Richtungsabhängigkeit werden mehrere Parameter benötigt, um das anisotrope Material zu beschreiben, nämlich E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{13}, G_{23}, ν_{12}, ν_{13} und ν_{23} (vgl. Abschnitt 3.1.3). Im Gegensatz dazu reichen die drei Materialparameter E, G und ν im isotropen Fall aus [21]. Dabei beziehen sich die Indizes auf die Achsen des Laminatkoordinatensystems.

3.1.1 Spannungszustand

An einer Körperkontur angreifende Kräfte verursachen Belastungen im Inneren des Körpers. Diese Belastungen sind als Kraft pro Fläche in Form von Vektoren definiert und werden Spannungen genannt. Drei jeweils senkrecht aufeinander stehende Spannungsvektoren reichen aus, um den Spannungszustand in einem beliebigen Punkt eines kontinuierlichen Mediums vollständig zu beschreiben [22]. Abbildung 3.3 bildet alle Spannungen ab, die an einem in kartesischen Koordinaten als Würfel dargestellten Volumenelement angreifen.

Der erste Spannungsindex wird durch die Richtung der Flächennormalen bestimmt und der Zweite durch die Wirkungsrichtung der Spannung. Es gilt die Vorzeichenkonvention, nach der positive Spannungen am positiven (negativen) Schnittufer in positive (negative) Koordinatenrichtung zeigen [22]. Stimmen beide Indizes überein, handelt es sich um sogenannte Normalspannungen (σ) und bei ungleichen Indizes, also Spannungen, die in der Ebene wirken, um Schubspannungen (τ). Infinitesimale Spannungsänderungen entlang der Strecken dx, dy bzw. dz können durch eine linearisierte Taylor-Reihe approximiert werden. Diese Operation wird in Abbildung 3.3 durch die Parameter k_1, k_2 und k_3 angedeutet, welche ausgeschrieben folgende Gestalt annehmen:

$$k_1 = \frac{\partial}{\partial x}\, dx\,, \quad k_2 = \frac{\partial}{\partial y}\, dy \quad \text{und} \quad k_3 = \frac{\partial}{\partial z}\, dz\,. \tag{3.1}$$

Zusätzlich zu den äußeren Spannungen (äußere Kräfte geteilt durch Angriffsfläche) können Volumenkräfte (wie z.B. die Schwerkraft) f_x, f_y und f_z im Inneren des Körpers wirken. Durch Bilden des Kräftegleichgewichtes in allen Koordinatenrichtungen ergeben sich folgende Beziehungen, die auch als Gleichgewichtsbedingungen des Spannungszustandes bezeichnet und in Abschnitt 3.3 wieder aufgegriffen werden [22]:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_x &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz - \sigma_{xx}\,dy\,dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz - \tau_{yx}\,dx\,dz \\ &\quad + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy - \tau_{zx}\,dx\,dy + f_x\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0\,,\end{aligned} \tag{3.2a}$$

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_y &= \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz - \tau_{xy}\,dy\,dz + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz - \sigma_{yy}\,dx\,dz \\ &\quad + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy - \tau_{zy}\,dx\,dy + f_y\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0\,,\end{aligned} \tag{3.2b}$$

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_z &= \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz - \tau_{xz}\,dy\,dz + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\,dy\right) dx\,dz - \tau_{yz}\,dx\,dz \\ &\quad + \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy - \sigma_{zz}\,dx\,dy + f_z\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0\,.\end{aligned} \tag{3.2c}$$

Für die nachfolgenden Betrachtungen werden alle Volumenkräfte zu Null angenommen, um ausschließlich die Spannungen zu betrachten. Aus dieser Annahme und einer Umformulierung der Gleichgewichtsbedingungen in eine kurze Schreibweise, wobei $\underline{\underline{\sigma}}$ den Spannungstensor zweiter Stufe und $\vec{\nabla}$ den Nabla-Operator darstellt, folgt der Zusammenhang:

$$\vec{0} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{\nabla} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Das Aufstellen des Momentengleichgewichtes im zweidimensionalen, ebenen Spannungszustand (ESZ)[1] um den Punkt, in dem sich die Wirkungslinien der Normalspannungen schneiden, resultiert in der Erkenntnis, dass Indizes von Schubspannungen vertauschbar sind, da sich die hervorgerufenen Momente gegenseitig aufheben [22]. Folglich besteht der Spannungstensor nur noch aus sechs statt neun Unbekannten und ist symmetrisch:

[1] Vernachlässigung der z-Richtung und aller dadurch beeinflussten Spannungen

$$\tau_{ij} \equiv \tau_{ji} \quad \text{für} \quad i,j \in [x,\, y,\, z] \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Wie bereits zu Beginn des Abschnittes erwähnt, kann ein Spannungszustand in einem beliebigen Punkt durch drei senkrecht aufeinander stehende Spannungsvektoren vollständig beschrieben werden.

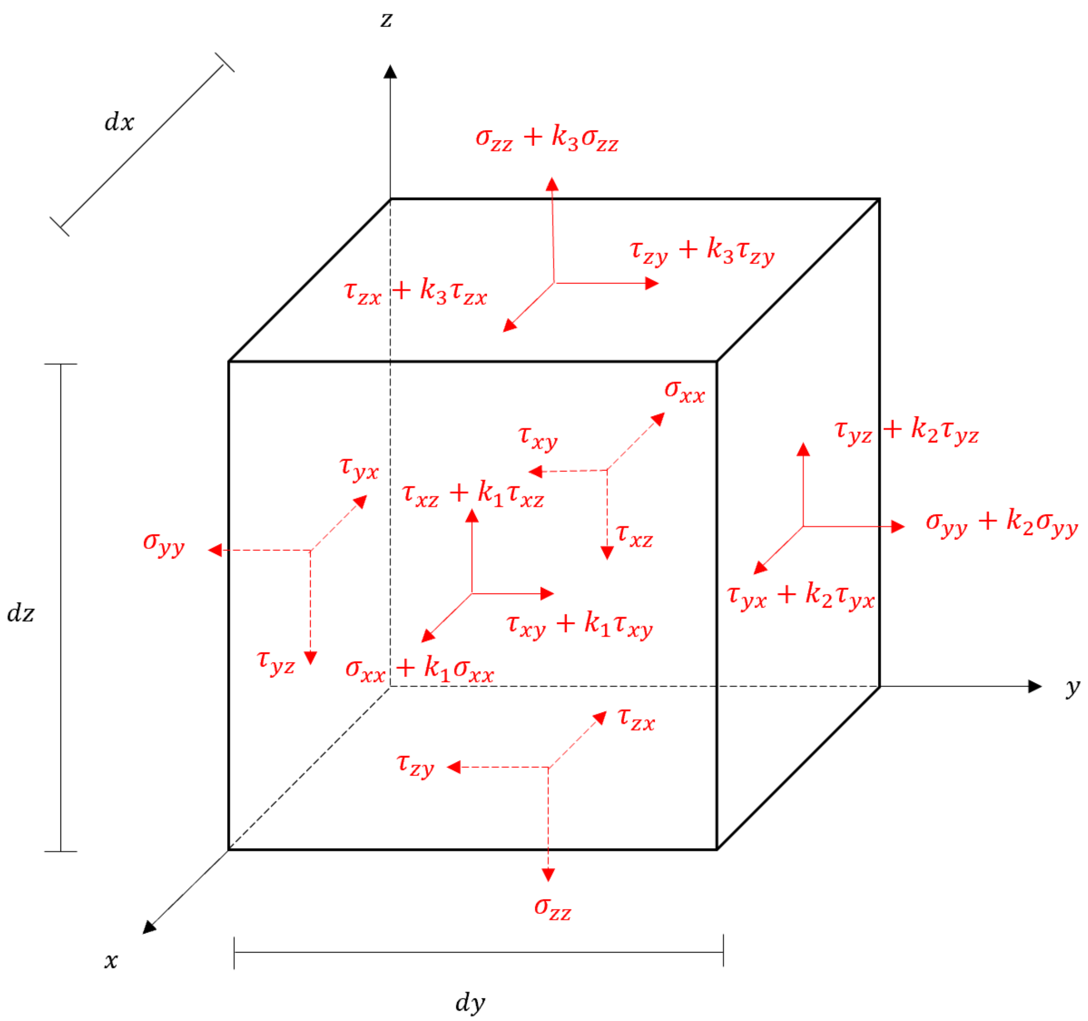


Abbildung 3.3: Darstellung von Spannungskompenten am Beispiel eines Würfel in kartesischen Koordinaten

Äußere Spannungen, im Folgenden in Bezug auf die Normalenrichtung der belasteten Fläche X_n, Y_n oder Z_n genannt, lassen sich also wie folgt über Richtungskosinus auf die in der Ebene wirkenden Spannungen aufteilen (vgl. Abbildung 3.3):

$$X_n = \sigma_{xx}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{x}\right)\right) + \tau_{xy}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{y}\right)\right) + \tau_{xz}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{z}\right)\right)\ , \tag{3.5a}$$

$$Y_n = \tau_{xy}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{x}\right)\right) + \sigma_{yy}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{y}\right)\right) + \tau_{yz}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{z}\right)\right)\ , \tag{3.5b}$$

$$Z_n = \tau_{xz}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{x}\right)\right) + \tau_{yz}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{y}\right)\right) + \sigma_{zz}\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{n},\vec{z}\right)\right)\ , \tag{3.5c}$$

wobei $\vec{n}$ die Richtung der Last angibt und $\vec{x}$, $\vec{y}$ sowie $\vec{z}$ die Einheitsvektoren des Koordinatensystems darstellen.

3.1.2 Verzerrungszustand

Im Folgenden sollen die kinematischen Beziehungen, welche Verformungen mit Verzerrungen in Verbindung setzten [22], für den allgemeinen dreidimensionalen Fall aufgestellt werden. Mit den Verschiebungen u, v und w in x- y- bzw. z-Richtung ergeben sich die Dehnungen ε und die Scherungen γ zu:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{3.6a}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{und} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\ , \tag{3.6b}$$

oder in Anlehnung an die Matrixschreibweise aus Gleichung 3.3 bzw. Gleichung 3.4 als Verzerrungstensor zweiter Stufe:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \text{sym.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij} \quad \text{für} \quad i,\, j \in [x,\, y,\, z] \quad \text{und} \quad i \neq j\,. \tag{3.6c}$$

Gleichungen 3.6a und 3.6b zeigen, dass die sechs Verzerrungsgrößen durch nur drei Verformungsgrößen beschrieben werden können. Es liegt also eine Überbestimmtheit vor. Durch Ableiten der Verzerrungen nach den Koordinatenrichtungen können die Verformungen aus den Differentialgleichungen eliminiert werden. Als Resultat daraus entstehen die sogenannte Verträglichkeitsbedingungen, oder auch Kompatibilitätsbedingungen genannt, zwischen Verzerrungen. Da nur die Verträglichkeitsbedingung der x-y-Ebene für die spätere Betrachtung von Relevanz ist, werden die Restlichen hier nicht aufgeführt. Mit den Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}\,, \tag{3.7}$$

ergibt sich die Verträglichkeitsbedingung:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\,. \tag{3.8}$$

Physikalisch bedeuten die Verträglichkeitsbedingungen, dass benachbarte Bereiche im Material, die vor der Verformung zusammenhängend waren, auch nach der Verformung noch zusammenhängend sind. Das bedeutet, dass weder Überlappungen noch Löcher existieren [23].

3.1.3 Stoffgesetz

Den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen bildet das Stoffgesetz, welches das Material beschreibt. Abbildung 3.4 zeigt sogenannte Spannungs-Dehnungs-Kurven für jeweils einen Vertreter der Metalle und der FVW (QI-Laminat), welche den verschiedenen Dehnungen entsprechend zugehörige Spannungen zuweisen. Die Daten werden zumeist aus Zugversuchen gewonnen, wobei dieses Diagramm nicht die experimentellen Daten, sondern daraus abgeleitete exemplarische Verläufe zeigt.

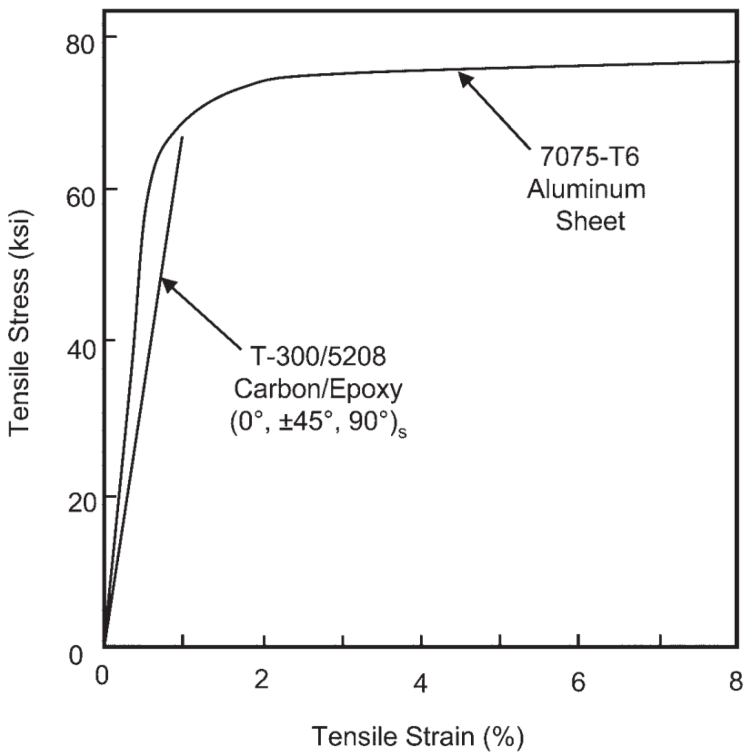


Abbildung 3.4: Linear-elastisches Materialverhalten von FVW und Metalle für kleine Dehnungen [24]

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen bei FVW kann vereinfacht als linear angesehen werden, wie es durch die Gerade in Abbildung 3.4 verdeutlicht wird. Aus diesem Grund spricht man bei FVW auch von linear-elastischem Materialverhalten [7]. In der späteren Betrachtung von Laminaten mit induzierten Metalllagen wird dessen Materialverhalten ebenfalls als linear-elastisch angenommen, obwohl die Kurve für Aluminium in Abbildung 3.4, welche hier qualitativ als Repräsentant für alle Metalle angesehen werden kann, einen deutlich nichtlinearen Verlauf abbildet. Der Grund dafür ist der, dass sich Spannungen und Dehnungen für kleine Deformationen, wie sie meistens in Laminaten auftauchen, noch im linearen Bereich der Kurve befinden. Die Steigung der Geraden wird als Elastizitätsmodul oder auch Young'scher Modul bezeichnet. Im Stoffgesetz von Hook für linear-elastische Materialien ergibt sich daraus die einfachste Form des Stoffgesetztes zu:

$$\sigma = E\,\varepsilon\,. \tag{3.9}$$

Setzt man die Tensoren der Spannung und der Verzerrung (Gleichung 3.4 bzw. Gleichung 3.6c) anstelle der Skalaren ein, ergibt sich das allgemeine Hook'sche Gesetz für den dreidimensionalen Fall zu:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \quad \text{für} \quad i,\, j,\, k,\, l \in [1,\, 2,\, 3]\ , \tag{3.10}$$

wobei C die Proportionalitätsfaktoren in Form eines Tensors vierter Stufe repräsentiert und die Indizes 1, 2 und 3 die Hauptachsen im Laminatkoordinatensystem bezeichnen. Aufgrund des symmetrischen Spannungs- und Verzerrungstensors gelten folgende Zusammenhänge

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \text{und} \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}\,, \tag{3.11}$$

sodass sich die 81 Komponenten des Tensores auf 36 unabhängige Komponenten reduzieren lassen [24]. Des Weiteren wird Energie durch Deformationen in potentielle Energie des Körpers umgewandelt [7]. Durch das Ableiten des Potentials kann gezeigt werden, dass zusätzlich zu Gleichung 3.11 der Zusammenhang

$$C_{ijkl} = C_{klij}\,, \tag{3.12}$$

gilt, wodurch sich die Anzahl der Tensorkomponenten auf 21 reduziert [19]. Wegen der Symmetrie in allen Tensoren, können die zwei Tensoren zweiter Stufe zu Pseudovektoren und der Tensor vierter Stufe zu einer Pseudomatrix umgeschrieben werden, um das Stoffgesetz in einfacher Weise ausschreiben zu können:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Die C-Matrix, auch Steifigkeitsmatrix genannt, in Gleichung 3.13 gilt generell für aleotrope Materialien, also für den maximalen Grad der Anisotropie. Existieren jedoch drei Symmetrieebenen, sodass das Stoffgesetz invariant gegenüber Drehungen um 180° in Bezug auf die Schnittgeraden ist, reduziert sich die Anzahl der Komponenten der Steifigkeitsmatrix erneut, sodass neun unabhängige Komponenten übrig bleiben. Materialien mit dieser Eigenschaft, wie zum Beispiel UD-Schichten aus FVW, werden orthotrop oder auch orthogonal-anisotrop genannt und durch folgendes Stoffgesetz beschrieben [19]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} . \tag{3.14}$$

Durch Invertieren der Steifigkeitsmatrix $[C]$ ergibt sich die Nachgiebigkeitsmatrix $[A]$ für den aleotropen Fall:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ & & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ & \text{sym.} & & & A_{55} & A_{56} \\ & & & & & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} , \tag{3.15}$$

bzw. für den orthotropen Fall:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & A_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & A_{55} & 0 \\ & & & & & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} . \tag{3.16}$$

Die Methoden zur Bestimmung der Spannungsverteilung in Laminaten (vgl. Abschnitt 4) nehmen an, dass die Dickenrichtung der Laminate einen vernachlässigbaren Einfluss auf das Ergebnis hat, sodass ausschließlich der ESZ betrachtet wird. Folglich werden die Spannungen σ_3, τ_{23} und τ_{13} gleich Null gesetzt, jedoch nicht ε_3, um Effekte von Querkontraktionen zu berücksichtigen [19]. Um das Stoffgesetz trotzdem für den zweidimensionalen Fall schreiben zu können, werden sogenannte reduzierte Steifigkeiten Q_{ij} eingeführt, die sich aus den Steifigkeiten des dreidimensionalen Falles zusammensetzen und den Einfluss der Dehnung senkrecht zur Ebene einbeziehen [19]:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad \text{mit} \quad i,\, j \in [1,\, 2,\, 3] \ . \tag{3.17}$$

Mit Hilfe der reduzierten Steifigkeiten kann das Stoffgesetz für ein orthotropes Material im ESZ definiert werden als [19]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} . \tag{3.18}$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix resultiert aus der Invertierung der Matrix für reduzierte Steifigkeiten $\left([S] = [Q]^{-1}\right)$ [19]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ & A_{22} & 0 \\ \text{sym.} & & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} . \tag{3.19}$$

Die einzelnen reduzierten Steifigkeiten und Nachgiebigkeiten können letztlich aus den Ingenieurskonstanten (E_{11}, E_{22}, G_{12} und ν_{12}) berechnet werden [19]:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} , \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} , \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} , \quad Q_{66} = G_{12} , \tag{3.20a}$$

$$A_{11} = \frac{1}{E_{11}} , \quad A_{22} = \frac{1}{E_{22}} , \quad A_{12} = A_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} , \quad \text{und} \quad A_{66} = \frac{1}{G_{12}} , \tag{3.20b}$$

wobei ν_{21} durch die reziproke Beziehung

$$\nu_{21} = \nu_{12}\frac{E_{22}}{E_{11}} , \tag{3.21}$$

berechnet werden kann [19].

3.1.4 Klassische Laminattheorie

Die klassische Laminattheorie (engl.: CLT) basiert auf der Kirchhoffschen Plattentheorie [19] und beschäftigt sich mit aus Einzelschichten bestehenden Laminaten. Es wird angenommen, dass die einzelnen UD-Schichten perfekt miteinander verklebt und die Klebschicht unendlich dünn sei [19]. Somit kann das Laminat als eine spezielle UD-Schicht angesehen werden, deren Eigenschaften aus den Einzellagen und dem Laminataufbau stammen [19]. Um in einer späteren Betrachtung die Spannungsverteilung vom Gesamtlaminat auf die Einzellage beziehen zu können, wird folgende aus der CLT stammende Gleichung genutzt, auf deren aufwendige Herleitung hier verzichtet wird (vgl. [19]):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_0 + z \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} . \tag{3.22}$$

Der erste Vektor stellt die Verzerrungen der k-ten Lage des Laminates dar und der zweite Vektor die der Mittellage (gekennzeichnet durch den Index 0). Der dritte Vektor enthält die Deformationskrümmungen κ des Laminates und wird mit der Höhe z multipliziert, die in der Mittellage den Wert Null annimmt.

Für symmetrische Laminataufbauten (spiegelsymmetrisch an der Mittellage) kann gezeigt werden, dass keine Koppelung zwischen angreifenden Lasten von außen und Krümmungen des Laminates bestehen [18]. Aus diesem Grund fällt der Krümmungsvektor aus Gleichung 3.22 raus, sodass noch der einfache Zusammenhang bleibt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_0 \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon^k_{x,\,y} = \varepsilon^0_{x,\,y} = \overline{\varepsilon}_{x,\,y} \,. \tag{3.23}$$

Einsetzten des orthotropen Stoffgesetztes aus Gleichung 3.19 für die Verzerrung der Mittellage ergibt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} . \tag{3.24}$$

Anschließendes Einsetzen von Gleichung 3.18 durch Multiplikation mit $[Q]^{-1}$ und Umstellung nach den Spannungen in der Einzellage durch Multiplikation mit $[Q]$ ergibt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} , \tag{3.25}$$

wobei Matrix $\left[\overline{Q}\right]$ die reduzierten Steifigkeiten der k-ten Schicht im x-y-Koordinatensystem darstellt, Matrix $[A]$ die Nachgiebigkeiten des Laminates und der Vektor $\vec{\sigma}$ die Laminatspannungen.

3.2 Koordinatentransformation

In vielen Fällen, werden Spannungs- oder Verzerrungszustände nicht im x-y-z-Koordinatensystem angegeben, sondern in einem dazu um den Winkel θ Gedrehten. Ein Beispiel ist das Laminatkoordinatensystem in Abbildung 3.2. Um die Spannungen bzw. Dehnungen in das jeweils andere

Koordinatensystem umrechnen zu können, kann die Transformationsmatrix folgender Gestalt angewandt werden [18]:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\sin(\theta)\,\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\sin(\theta)\,\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\,\cos(\theta) & \sin(\theta)\,\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \tag{3.26}$$

wobei der Winkel im mathematisch positiven Drehsinn definiert ist. Für Drehungen im Uhrzeigersinn werden die Vorzeichen der Terme in denen Sinus und Cosinus miteinander multipliziert werden, umgekehrt. Mit dieser Matrix können sowohl die Spannungen und Dehnungen:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon'_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} \\ \varepsilon'_{xy} \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

also auch die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen transformiert werden:

$$\left[\overline{Q}\right] = [T] \cdot [Q] \cdot [T]^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \left[\overline{A}\right] = [T] \cdot [A] \cdot [T]^{-1} . \tag{3.28}$$

Der Zusatz „′“ bzw. der Überstrich kennzeichnen die transformierten Größen. Die Materialeigenschaften können ebenfalls für das neue Koordinatensystem über folgende Gleichungen berechnet werden [7]:

$$\frac{1}{E'_{11}} = \frac{\cos^4(\theta)}{E_{11}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\,\nu_{12}}{E_{11}}\right) \sin^2(\theta)\,\cos^2(\theta) + \frac{\sin^4(\theta)}{E_{22}}, \tag{3.29a}$$

$$\frac{1}{E'_{22}} = \frac{\sin^4(\theta)}{E_{11}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\,\nu_{12}}{E_{11}}\right) \sin^2(\theta)\,\cos^2(\theta) + \frac{\cos^4(\theta)}{E_{22}}, \tag{3.29b}$$

$$\frac{1}{G'} = \frac{1}{G_{12}} + \left(\frac{1+\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1+\nu_{21}}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}}\right) \sin^2(2\,\theta), \tag{3.29c}$$

$$\nu'_{12} = E'_{11} \left[\frac{\nu_{12}}{E_{11}} - \frac{1}{4}\left(\frac{1+\nu_{12}}{E_{22}} + \frac{1+\nu_{21}}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}}\right) \sin^2(2\,\theta)\right], \tag{3.29d}$$

$$\nu'_{21} = \nu'_{12} \frac{E'_{22}}{E'_{11}} . \tag{3.29e}$$

3.3 Genereller Spannungszustand einer homogenen Platte

Im Folgenden soll zunächst der ebene Spannungszustand für eine elastische, homogene, anisotrope und flache Platte mit konstanter Dicke hergeleitet werden (vgl. Abbildung 3.5), wobei Kräfte in z-Richtung nicht auftreten. Anschließend wird ebenfalls der orthotrope Fall betrachtet. In beiden Fällen wird zusätzlich angenommen, dass die angreifenden Kräfte parallel zur Mittelebene wirken und gleichmäßig verteilt sind. Des Weiteren werden kleine Deformationen und eine biegesteife Mittelebene vorausgesetzt [7].

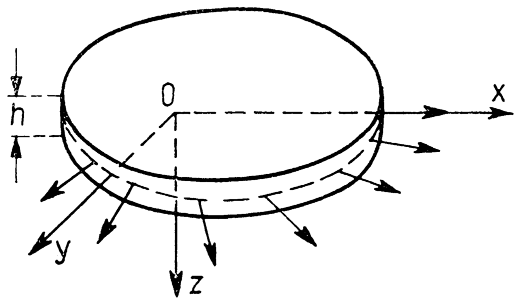


Abbildung 3.5: Darstellung einer elastischen, homogenen, anisotropen und flacher Platte mit konstanter Dicke h im kartesischen Koordinatensystem mit Mitellebene in der x-y-Ebene [7]

Durch die Annahme gleichverteielter Lasten können Gleichungen 3.5a und 3.5b als Integral über die Dicke geschrieben werden, sodass sich über die Dicke konstante Kräfte ergeben. Dabei wird die x-y-Ebene in die Mittellage gelegt [7]:

$$\overline{X}_n = \int_{-h/2}^{h/2} X_n \, dz \quad \text{und} \quad \overline{Y}_n = \int_{-h/2}^{h/2} Y_n \, dz \,. \tag{3.30}$$

Gleiches gilt für die Spannungen aus Gleichung 3.3, wobei ein Überstrich einen Mittelwert repräsentiert [7]:

$$\overline{\sigma}_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \, dz \,, \quad \overline{\sigma}_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} \, dz \quad \text{und} \quad \overline{\tau}_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz \,. \tag{3.31}$$

Mit den neuen über die Dicke konstanten Spannungen lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen aus Gleichung 3.2 und die Verträglichkeitsbedingung der Verzerrung aus Gleichung 3.8 folgendermaßen für den ebenen Fall schreiben:

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial y} = 0 \,, \tag{3.32a}$$

$$\frac{\partial \overline{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma}_{yy}}{\partial y} = 0 \,, \tag{3.32b}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\varepsilon}_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{\varepsilon}_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \overline{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y} = 0\,. \tag{3.32c}$$

Einsetzten des Stoffgesetzes aus Gleichung 3.15 für den ebenen Fall ($\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) in die Verträglichkeitsbedingung aus Gleichung 3.32c ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \left(A_{11}\,\overline{\sigma}_{xx} + A_{12}\,\overline{\sigma}_{yy} + A_{16}\,\overline{\tau}_{xy}\right)}{\partial y^2} \\ +&\frac{\partial^2 \left(A_{12}\,\overline{\sigma}_{xx} + A_{22}\,\overline{\sigma}_{yy} + A_{26}\,\overline{\tau}_{xy}\right)}{\partial y^2} \\ -&\frac{\partial^2 \left(A_{16}\,\overline{\sigma}_{xx} + A_{26}\,\overline{\sigma}_{yy} + A_{66}\,\overline{\tau}_{xy}\right)}{\partial x \partial y} = 0\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Es wird die Spannungsfunktion $F\left(x,\, y\right)$ nach Airy eingeführt, die so definiert ist, dass die Gleichgewichtsbedingungen aus Gleichungen 3.32a-c erfüllt sind. Die dafür nötigen Eingeschaften der Funktion lauten [7]:

$$\overline{\sigma}_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,, \quad \overline{\sigma}_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,, \quad \overline{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,. \tag{3.34}$$

Eingesetzt in die Verträglichkeitsbedingung aus Gleichung 3.33 ergibt sich der Zusammenhang:

$$A_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\,A_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + \left(2\,A_{12} + A_{66}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\,A_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + A_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0\,, \tag{3.35}$$

bzw. mit eingesetzten Nachgiebigkeiten für den orthotropen Fall:

$$\frac{1}{E_{yy}}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\,\nu_{xy}}{E_{xx}}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_{xx}}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0\,. \tag{3.36}$$

Es sei festgehalten, dass die Gleichgewichtsbedingungen der Spannung, die Verträglichkeitsbedingung der Verzerrung sowie die Randbedingungen[2] allesamt durch die Spannungsfunktion ausgedrückt werden können. Um den Spannungszustand einer Platte beschreiben zu können, wird folglich nur die Spannungsfunktion benötigt [7].

3.4 Genereller Ausdruck der Spannungsfunktion

Die Spannungsfunktion aus Gleichung 3.35 ist eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Lösung den Spannungszustand einer Platte beschreibt [7]. Um diese Lösung zu finden, müssen zunächst die Nullstellen der Funktion über die charakteristische Gleichung be-

[2] Auf die Herleitung wird hier verzichtet; vgl. Lekhnitskii [7])

stimmt werden, welche in ihrer generellen Form dargestellt werden kann als [7]:

$$A_{11}\,\mu^4 - 2A_{16}\,\mu^3 + (2A_{12} + A_{66})\;\mu^2 - 2A_{26}\,\mu + A_{22} = 0\,. \tag{3.37}$$

Dabei bezeichnet μ_k für $k \in [1,\,2,\,3,\,4]$ die Nullstellen der Funktion, die nach einem Beweis von Lekhnitskii ausschließlich komplex oder rein imaginär sind, vorausgesetzt es handelt sich um einen elastischen Körper mit endlichen Nachgiebigkeiten ungleich Null [7].

Die Nullstellen können abhängig von den Materialparametern entweder einzigartig sein oder doppelt vorkommen. Bei isotropen und quasi-isotropen Materialien liegen die doppelten Nullstellen i bzw. $-i$ vor [7]. Die Nullstellen μ_k werden auch komplexe Parameter erster Ordnung der ebenen Spannung bzw. kurz komplexe Parameter genannt. Sie können als Größen verstanden werden, die den Grad der Materialanisotropie beschreiben [7]:

$$\text{Einzigartig}: \mu_1 = \alpha + \beta i\,, \quad \mu_2 = \gamma + \delta i\,, \quad \mu_3 = \overline{\mu}_1 = \alpha - \beta i\,, \quad \mu_4 = \overline{\mu}_2 = \gamma - \delta i\,, \tag{3.38a}$$

$$\text{Doppelt}: \mu_1 = \mu_2 = \alpha + \beta i\,, \quad \mu_3 = \mu_4 = \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_2 = \alpha - \beta i\,, \tag{3.38b}$$

$$\text{für} \quad \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta \,\in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \beta > 0,\, \delta > 0\,.$$

Die Integration der Spannungsfsunktion erfolgt durch das Umschreiben der Spannungsfunktion mit Hilfe linearer Differentialoperatoren erster Ordnung:

$$D_1\,D_2\,D_3\,D_4\,F = 0 \quad \text{mit} \quad D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{für} \quad k \,\in\, [1,\,2,\,3,\,4]\;, \tag{3.39}$$

und Substitution g_1, g_2 und g_3 folgender Art [7]:

$$g_1 = D_2\,D_3\,D_4\,F\;, \quad g_2 = D_3\,D_4\,F \quad \text{und} \quad g_3 = D_4\,F\,. \tag{3.40}$$

Einsetzten in Gleichung 3.39 und Anwenden des Differentialoperators liefert:

$$D_1\,g_1 = \frac{\partial g_1}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0\,, \tag{3.41a}$$

$$D_2\,g_2 = \frac{\partial g_2}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = g_1\,, \tag{3.41b}$$

$$D_3\,g_3 = \frac{\partial g_3}{\partial y} - \overline{\mu_1} \frac{\partial g_3}{\partial x} = g_2\,, \tag{3.41c}$$

$$D_4\,F = \frac{\partial F}{\partial y} - \overline{\mu_2} \frac{\partial F}{\partial x} = g_3\,. \tag{3.41d}$$

Integration dieser vier nicht homogenen Differentialgleichungen liefert je nach Zusammensetzung der komplexen Parametern (vgl. Gleichung 3.38a-c) die Funktionen [7]:

$$
\begin{aligned}
\text{Einzigartig}: F &= F_1(x+\mu_1\,y) + F_2(x+\mu_2\,y) + F_3(x+\overline{\mu}_1\,y) + F_4(x+\overline{\mu}_2\,y)\,, && (3.42a)\\
\text{Doppelt}: F &= F_1(x+\mu_1\,y) + (x+\overline{\mu}_1\,y)F_2(x+\mu_1\,y) && (3.42b)\\
&\quad + F_3(x+\overline{\mu}_1\,y) + (x+\mu_1\,y)F_4(x+\overline{\mu}_2\,y)\,,
\end{aligned}
$$

wobei die Variablen $x + \mu_k\,y$ bzw. $x + \overline{\mu}_k\,y$ keine gewöhnlichen komplexen Zahlen der Form $x + i\,y$ sind und im folgenden abgekürzt werden mit:

$$
z_k = x + \mu_k\,y\,, \quad \overline{z}_k = x + \overline{\mu}_k\,y \quad \text{für} \quad k \in [1,\, 2]\;. \tag{3.43}
$$

Da die Spannungsfunktion F eine reale Funktion sein soll, wird ausschließlich der Realteil im Weiteren verwendet [7]. Aus Gleichungen 3.42a und 3.42b wird ersichtlich, dass die Funktionen F_1 und F_3 sowie F_2 und F_4 gleich sind, sobald der Imaginärteil vernachlässigt wird. Somit ergibt sich die neue Schreibweise der Spannungsfunktion zu:

$$
\begin{aligned}
\text{Einzigartig}: F &= 2\,\mathrm{Re}\left[F_1(z_1) + F_2(z_2)\right]\,, && (3.44a)\\
\text{Doppelt}: F &= 2\,\mathrm{Re}\left[F_1(z_1) + \overline{z}_1 F_2(z_2)\right]\,. && (3.44b)
\end{aligned}
$$

Mit Blick auf die Methoden in Abschnitt 4 wird ab hier lediglich die Spannungsfunktion mit einzigartigen komplexen Parametern betrachtet.

Um die Spannungen in einer Platte berechnen zu können, wird Gleichung 3.44a in die Beziehungen aus Gleichung 3.34 eingesetzt, sodass sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{2\,\mathrm{Re}\left[F_1(z_1) + F_2(z_2)\right]\}\,, && (3.45a)\\
\overline{\sigma}_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{2\,\mathrm{Re}\left[F_1(z_1) + F_2(z_2)\right]\}\,, && (3.45b)\\
\overline{\tau}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\{2\,\mathrm{Re}\left[F_1(z_1) + F_2(z_2)\right]\}\,. && (3.45c)
\end{aligned}
$$

Mit den Funktionen $\phi(z_1)$ und $\psi(z_2)$, die als Ableitungen der Spannungsfunktion definiert sind [7]:

$$
\phi(z_1) = \frac{dF_1}{dz_1} \quad \text{und} \quad \psi(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2}\,, \tag{3.46}
$$

ergeben sich die Spannungen zu:

$$
\begin{aligned}
\overline{\sigma}_{xx} &= 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\,\phi'(z_1) + \mu_2^2\,\psi'(z_2)\right]\,, && (3.47a)\\
\overline{\sigma}_{yy} &= 2\,\mathrm{Re}\left[\phi'(z_1) + \psi'(z_2)\right]\,, && (3.47b)\\
\overline{\tau}_{xy} &= 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\,\phi'(z_1) + \mu_2\,\psi'(z_2)\right]\,. && (3.47c)
\end{aligned}
$$

4 Analytische Spannungsverteilungen

Open-Hole-Tension-Strukturen (OHT-Strukturen) enthalten eine oder mehrere Aussparungen und werden unter Zug belastet. Diese Aussparungen können beispielsweise Kreise, Ellipsen oder sonstige Geometrien annehmen. In den nächsten zwei Abschnitten sollen zuerst Methoden zur Berechnung der Spannungsverteilung in solchen Strukturen vorgestellt werden. Anschließend wird das Verfahren beschrieben, mit welchem die Spannungen im Laminat und in den Einzellagen auf Basis der analytischen Methoden bestimmt werden können.

4.1 Berechnung für das Laminat

Im Rahmen einer Vorstudie werden alle gefundenen analytischen Methoden aus der Literatur (vgl. Abschnitt 2) in die Programmiersprache *Python* überführt und für verschiedene Parameter verglichen. Es stellt sich heraus, dass die Kurvenverläufe nach der Methode von Tang [9] mit der von Soutis und Filiou [16] übereinstimmt. Die Methoden von Zhang et al. [18] sowie von Ukadgaonker und Rao [14] liefern ebenfalls die gleichen Ergebnisse. Die Methode von Echavarria [17] liefert die selben Ergebnisse, wie die von Soutis und Filiou mit dem Faktor $1,5$ multipliziert (vgl. Anhang A.1).

Für die nachfolgenden Untersuchungen werden die Methoden von Soutis und Filiou, Ukadagonker und Rao sowie von Lekhnitskii gewählt, da diese Methoden verschiedene Lösungen generieren und ausführlich dokumentiert sind. Es werden Platten mit einer kreisrunder Aussparung unter externer Last untersucht, die als unendlich ausgedehnt angesehen werden können. Außerdem wird angenommen, dass die externen Lasten gleichverteilt an der Mittelebene der Platte angreifen. Die meisten Methoden nutzen den von Lekthnitskii hergeleiteten und im theoretischen Hintergrund beschriebenen Ansatz der komplexen Spannungsfunktion (vgl. Abschnitt 3.3 und Abschnitt 3.4).

4.1.1 Spannungsverteilung nach Soutis und Filiou

C. Soutis und C. Filiou beschäftigen sich in ihren Arbeiten [16] und [15] mit der Spannungsverteilung in homogenen, elastischen, orthotropen und unendlich großen Platten mit einer kreisrunden Aussparung unter biaxialer Belastung (vgl. Abbildung 4.1).

An dieser Stelle wird der Biaxialitätsfaktor λ eingeführt. Er beschreibt das Verhältnis aus der in x- und y-Richtung angreifenden Lasten (p bzw. q) und wird für die Betrachtung in dieser Arbeit gleich Null gesetzt, um die analytischen Ergebnisse mit den Versuchsdaten aus Abschnitt 7 vergleichen zu können:

$$\lambda = \frac{q}{p}\,. \tag{4.1}$$

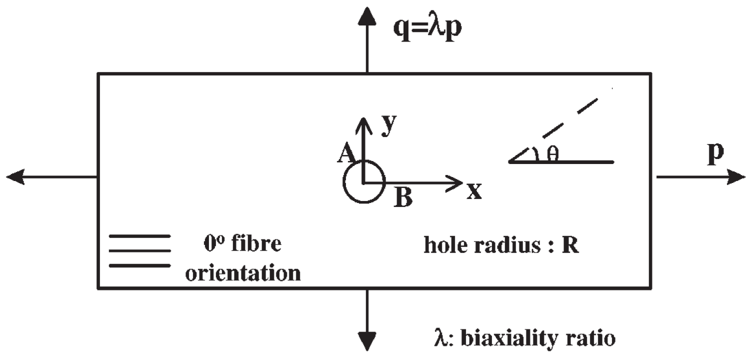


Abbildung 4.1: Problemdarstellung einer Platte mit kreisrunder Aussparung unter Zugbelastung in x- und y-Richtung mit Biaxialitätsfakor λ [16]

Die Grundlagen für diese Methoden bilden die von Lekhnitskii hergeleiteten Zusammenhänge aus Abschnitt 3. Zusätzlich zu der Schreibweise der komplexen Parameter aus Gleichung 3.38 führen Soutis und Filiou Gleichungen zur Berechnung der komplexen Parameter ein:

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{E_{xx}}{E_{yy}}}, \quad \beta_0 = \frac{E_{xx}}{2G_{xy} - \nu_{xy}}, \tag{4.2a}$$

$$\left.\begin{aligned} (i)\ \beta_0 \geq \alpha_0 : \quad & \mu_1 = i\left(\sqrt{\frac{\beta_0-\alpha_0}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}}\right), \\ & \mu_2 = i\left(-\sqrt{\frac{\beta_0-\alpha_0}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}}\right), \\ (ii)\ \alpha_0 > \beta_0 : \quad & \mu_1 = \sqrt{\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}, \\ & \mu_2 = -\sqrt{\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}} + i\sqrt{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2b}$$

Die Spannungsfunktionen werden in [15] hergeleitet und sind indentisch mit denen aus der Arbeit von Tang [9], sodass die übereinanderliegenden Kurvenverläufe der beiden Methoden aus Abbildung A.1 auch mathematisch erklärt werden können:

$$\phi'(z_1) = \frac{-ip}{2(\mu_1-\mu_2)(1+i\mu_1)}\left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - R^2(1+\mu_1^2)}}\right), \tag{4.3a}$$

$$\psi'(z_2) = \frac{ip}{2(\mu_1-\mu_2)(1+i\mu_2)}\left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - R^2(1+\mu_2^2)}}\right). \tag{4.3b}$$

Einsetzten in Gleichung 3.47a-c ergibt folgende Gleichungen für die Spannungen:

$$\sigma_{xx} = p + \mathrm{Re}\left\{\frac{p}{\mu_1 - \mu_2}\left[\frac{(\lambda\mu_2 - i)\,\mu_1^2}{1 + i\mu_1}\left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - R^2\,(1+\mu_1^2)}}\right)\right.\right. \tag{4.4a}$$
$$\left.\left. + \frac{(-\lambda\mu_1 + i)\,\mu_2^2}{1 + i\mu_2}\left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - R^2\,(1+\mu_2^2)}}\right)\right]\right\},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda p + \mathrm{Re}\left\{\frac{p}{\mu_1 - \mu_2}\left[\frac{(\lambda\mu_2 - i)}{1 + i\mu_1}\left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - R^2\,(1+\mu_1^2)}}\right)\right.\right. \tag{4.4b}$$
$$\left.\left. + \frac{(-\lambda\mu_1 + i)}{1 + i\mu_2}\left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - R^2\,(1+\mu_2^2)}}\right)\right]\right\},$$

$$\tau_{xy} = -\mathrm{Re}\left\{\frac{p}{\mu_1 - \mu_2}\left[\frac{(\lambda\mu_2 - i)\,\mu_1}{1 + i\mu_1}\left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - R^2\,(1+\mu_1^2)}}\right)\right.\right. \tag{4.4c}$$
$$\left.\left. + \frac{(-\lambda\mu_1 + i)\,\mu_2}{1 + i\mu_2}\left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - R^2\,(1+\mu_2^2)}}\right)\right]\right\}$$

$$\text{mit} \quad z_1 = x + \mu_1 y \quad \text{und} \quad z_2 = x + \mu_2 y\,.$$

4.1.2 Spannungsverteilung nach Ukadgaonker und Rao

V. G. Ukadgaonker und K. N. Rao stellen in ihrer Arbeit [14] eine generelle Lösung zur Bestimmung des Spannungszustandes in symmetrischen Laminaten mit unendlicher Breite und Länge vor, die beliebige Aussparungsformen und Lasten in der Ebene berücksichtigen kann (vgl. Abbildung 4.2).

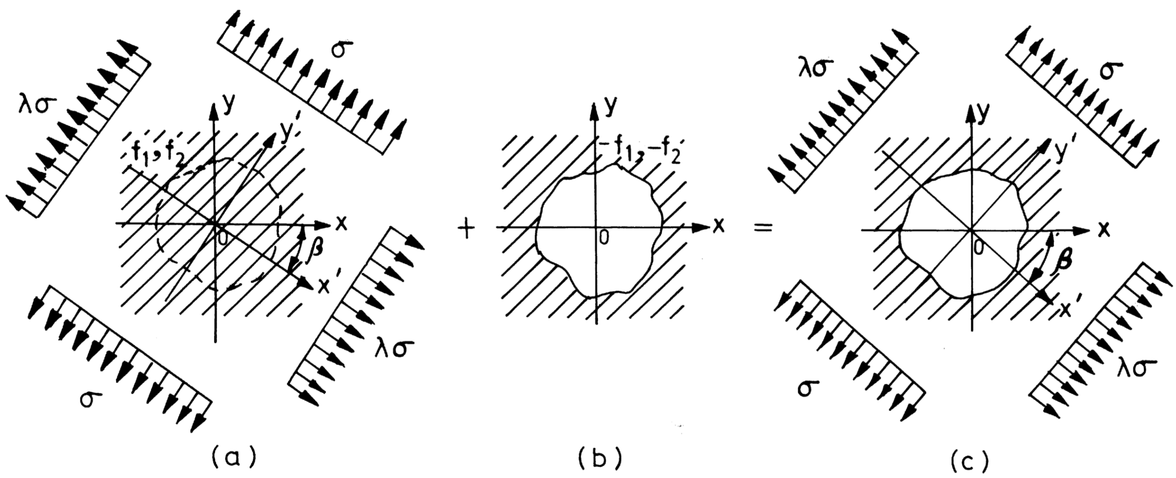


Abbildung 4.2: Darstellung der Problemkonfiguration und des Superpositionansatzes aus: Platte ohne Aussparung mit äußerer Last (a), Platte mit Aussparung ohne äußere Last (b), Ausgangssituation (c), [14]

Die Formulierung der Spannungen erfolgt unter Verwendung der von Savin [25] hergeleiteten Spannungsfunktion, welche dem von Lekhnitskii hergeleiteten Ausdruck aus Gleichung 3.47 [7] gleicht. Der Unterschied zwischen den Herleitungen liegt in der Herangehensweise. Lekhnitskii leitet seine Lösung mit Hilfe von Fourier Reihen her, während sich Savin der Schwarz-Christoffel-Transformation bedient [6].

Zunächst wird die Aussparung beliebiger Form durch konformes Abbilden aus der z-Ebene (Kurzdarstellung für die komplexe Ebene $z = x + iy$ mit Koordinaten x und y) in einen Einheitskreis der ζ-Ebene (Kurzdarstellung für die komplexe Ebene $\zeta = \rho e^{i\theta}$ mit Koordinaten ρ und θ) mit Radius gleich Eins ($\rho = 1$) überführt:

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{\zeta_k}\right) , \tag{4.5}$$

wobei R und m_k Parameter sind, die durch die Geometrie der Aussparung bestimmt werden. Aus [14] ist zu entnehmen, dass im Fall einer kreisrunden Aussparung der Geometrieparameter R dem Kreisradius entspricht und alle Faktoren m_k gleich Null sind:

$$m_k = 0 \ \forall k . \quad \rightarrow \quad z = \omega(\zeta) = R\zeta . \tag{4.6}$$

Diese Abbildungsfunktion gilt nur für isotrope Fälle und wird durch Einführung der komplexen Parameter und affine Transformation auf anisotrope Materialien erweitert [14]:

$$z_j = \omega_j(\zeta) = \frac{R}{2}\left(\frac{a_j}{\zeta} + b_j\zeta\right) \quad \text{mit} \quad a_j = (1 + i\mu_j), \quad b_j = (1 - i\mu_j) \quad \text{für} \quad i,\, j \in [1,\, 2] . \tag{4.7}$$

Die Abbildungsfunktion wird später in die Randbedingungen der Funktionen ϕ und ψ aus Gleichung 3.46 eingesetzt (vgl. Gleichung 4.10a-b), welche durch Superposition von Teillösungen zusammengesetzt werden. Die Platte wird in zwei Teilprobleme aufgeteilt, wobei das Erste aus der ebenen Platte ohne Aussparung mit äußeren Lasten und das Zweite aus der Platte mit Aussparung ohne äußere Lasten besteht (vgl. Abbildung 4.2).

Die äußeren Kräfte in kartesischen Koordinaten lauten nach der von Gao [13] adaptierten Schreibweise:

$$\sigma_{xx}^{\infty} = \frac{\sigma}{2}\left[(\lambda + 1) + (\lambda - 1)\cos(2\beta)\right] , \tag{4.8a}$$

$$\sigma_{yy}^{\infty} = \frac{\sigma}{2}\left[(\lambda + 1) - (\lambda - 1)\cos(2\beta)\right] , \tag{4.8b}$$

$$\tau_{xy}^{\infty} = \frac{\sigma}{2}\left[(\lambda - 1)\sin(2\beta)\right] \tag{4.8c}$$

wobei λ den Biaxialitätsfaktor darstellt, σ die äußere Spannung und β den Winkel zwischen der Winkungsrichtung von σ und der y-Achse. Für die in Abbildung 4.2 (a) und (b) dargestellten

Konfigurationen werden die Funktionen ϕ_a und ϕ_b sowie ψ_a und ψ_b aufgestellt. Dieser Schritt wird hier nicht näher beschrieben, da es sich dabei nur um mathematische Operationen handelt. Letztlich werden die Funktionen ϕ und ψ durch Superposition aus ϕ_a und ϕ_b bzw. ψ_a und ψ_b gebildet und in Gleichung 3.47 eingesetzt, sodass sich für die Spannungen folgende Gleichungen ergeben [14]:

$$\sigma_{xx} = \sigma_x^\infty + 2\mathrm{Re}\left[\mu_1^2 \phi_b'(z_1) + \mu_2^2 \psi_b'(z_2)\right] , \tag{4.9a}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_x^\infty + 2\mathrm{Re}\left[\phi_b'(z_1) + \psi_b'(z_2)\right] , \tag{4.9b}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_x^\infty + 2\mathrm{Re}\left[\mu_1 \phi_b'(z_1) + \mu_2 \psi_b'(z_2)\right] . \tag{4.9c}$$

Für den im Weiteren betrachteten Fall einer kreisrunden Aussparung unter uniaxialer Zugbelastung in x-Richtung ($\lambda = 0$ und $\beta = 90°$) lauten die Funktionen und deren Ableitungen wie folgt:

$$\text{mit} \quad \phi_b = \frac{a_3}{\zeta}, \quad \phi_b'(z_1) = \frac{\phi_b'(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)} = \frac{2}{R}\left(\frac{-a_3}{b_1\zeta^2 - a_1}\right), \tag{4.10a}$$

$$\text{und} \quad \psi_b = \frac{-a_4}{\zeta}, \quad \psi_b'(z_2) = \frac{\psi_b'(\zeta)}{\omega_2'(\zeta)} = \frac{2}{R}\left(\frac{a_4}{b_2\zeta^2 - a_2}\right) . \tag{4.10b}$$

Auf die Herleitung der einzelnen Parameter wird hier verzichtet; sie können jedoch in [14] nachgelesen werden. Stattdessen erfolgt eine kurze Auflistung:

$$a_3 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[\mu_2\left(K_1 + \overline{K}_2\right) - \left(K_3 + \overline{K}_4\right)\right] ,$$
$$a_4 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left[\mu_1\left(K_1 + \overline{K}_2\right) - \left(K_3 + \overline{K}_4\right)\right] ,$$

$$K_1 = \frac{R}{2}\left[B^* a_1 + \left(B'^* + iC'^*\right) a_2\right] ,$$
$$K_2 = \frac{R}{2}\left[B^* b_1 + \left(B'^* + iC'^*\right) b_2\right] ,$$
$$K_3 = \frac{R}{2}\left[\mu_1 B^* a_1 + \mu_2\left(B'^* + iC'^*\right) a_2\right] ,$$
$$K_4 = \frac{R}{2}\left[\mu_1 B^* b_1 + \mu_2\left(B'^* + iC'^*\right) b_2\right] ,$$

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1 ,$$
$$\mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2 ,$$

$$B^* = \frac{\sigma_{xx}^\infty + \left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right)\sigma_{yy}^\infty + 2\alpha_2\tau_{xy}^\infty}{2\left[\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)^2 + \left(\beta_2^2 - \beta_1^2\right)\right]},$$

$$B'^* = \frac{\left(\alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\right)\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty - 2\alpha_2\tau_{xy}^\infty}{2\left[\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)^2 + \left(\beta_2^2 - \beta_1^2\right)\right]},$$

$$C'^* = \Big\{\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\sigma_{xx}^\infty + \left[\alpha_2\left(\alpha_1^2 - \beta_1^2\right) - \alpha_1\left(\alpha_2^2 - \beta_2^2\right)\right]\sigma_{yy}^\infty$$

$$+ \left[\left(\alpha_1^2 - \beta_1^2\right) - \left(\alpha_2^2 - \beta_2^2\right)\right]\tau_{xy}^\infty\Big\} \Big/ \left\{2\left[\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)^2 + \left(\beta_2^2 - \beta_1^2\right)\right]\right\},$$

4.1.3 Spannungsverteilung nach Lekhnitskii

S. G. Lekhnitskii leitet in [7] keine Formel zur Bestimmung der Spannungsverteilung für eine ganze Platte her, sondern ausschließlich für den Rand einer elliptischen Aussparung in einer homogenen und anisotropen Platte mit unendlicher Breite und Länge, die als Sonderfall den Kreis enthält. Um auf die Spannungsverteilung der gesamten Platte schließen zu können, wird die Vorgehensweise von Mortensen und Thomsen [26] verwendet. In dieser wird die Spannung am Aussparungsrand mit einer vom Radius abhängigen Geometriefunktion multipliziert, um den Spannungsabfall in einer bestimmten Entfernung der Aussparung zu berücksichtigen. Die Basis für die Spannungsverteilung um die Aussparung bildet die Spannungsfunktion aus Gleichung 3.47.

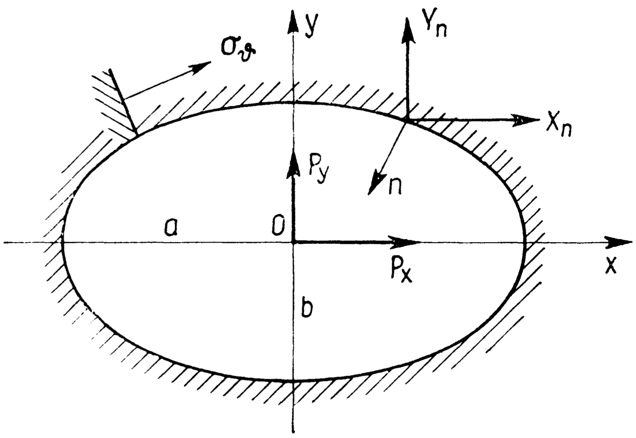


Abbildung 4.3: Unendlich große Platte mit elliptischer Aussparung und Dicke h unter Belastung durch äußere Kräfte X_n und Y_n; P_x und P_y sind die Komponenten der resultierenden Kraft [7]

Abbildung 4.3 zeigt die Problemstellung und die Koordinatentransformation zwischen der x-y-Ebene und der Darstellung durch den Winkel ϑ und den Halbachsen a und b der Ellipse mit:

$$x = a\cos(\vartheta) \quad \text{und} \quad y = b\sin(\vartheta)\,. \tag{4.11}$$

Die dargestellten äußeren Lasten aus Gleichung 3.5 sind vom Winkel abhängige Funktionen und können folgendermaßen als Fourier-Reihe ausgedrückt werden [7]:

$$2\mathrm{Re}\left[\phi(z_1) + \psi(z_2)\right] = \frac{P_y}{2\pi h}\vartheta + \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha_m\sigma^m + \overline{\alpha}_m\sigma^{-m}\right)\,, \tag{4.12}$$

$$2\mathrm{Re}\left[\mu_1\phi(z_1) + \mu_2\psi(z_2)\right] = \frac{-P_x}{2\pi h}\vartheta + \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_m\sigma^m + \overline{\beta}_m\sigma^{-m}\right)\,, \tag{4.13}$$

mit Konstanten α_0, α_m, β_0, β_m und σ, deren Definitionen für diese Herleitung irrelevant sind, da sie im weiteren Verlauf ersetzt werden. Aus den Fourier-Reihen ergeben sich die Lösungen für die Funktionen ϕ und ψ zu [7]:

$$\phi(z_1) = A_0 + A\ln(\zeta_1) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{\beta}_m - \mu_2\overline{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2}\zeta_1^{-m}\,, \tag{4.14a}$$

$$\psi(z_2) = B_0 + B\ln(\zeta_2) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\overline{\beta}_m - \mu_1\overline{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2}\zeta_2^{-m}\,. \tag{4.14b}$$

$$\text{mit} \quad \zeta_1 = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}}{a - i\mu_1 b}\,, \quad \text{und} \quad \zeta_2 = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}}{a - i\mu_2 b}\,.$$

Die genauen Definitionen der Konstanten A_0, A, B_0 und B sind für die Gleichung der Spannungsverteilung, wie sich später herausstellen wird, ebenfalls nicht relevant und werden hier nicht weiter erläutert, können aber in [7] nachgelesen werden.

Um die Spannungen am Aussparungsrand bestimmen zu können, werden die Ableitungen von Gleichungen 4.14a-b gebildet:

$$\phi' = \frac{1}{i\left(a\sin(\vartheta) - \mu_1 b\cos(\vartheta)\right)}\left(A - \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\overline{\beta}_m - \mu_2\overline{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2}\sigma^{-m}\right)\,, \tag{4.15}$$

$$\psi' = \frac{1}{i\left(a\sin(\vartheta) - \mu_1 b\cos(\vartheta)\right)}\left(B - \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\overline{\beta}_m - \mu_1\overline{\alpha}_m}{\mu_1 - \mu_2}\sigma^{-m}\right)\,, \tag{4.16}$$

und schließlich in Gleichung 3.47 eingesetzt, sodass sich folgender Ausdruck für Tangentialspannung σ_ϑ am Rand der Aussparung ergibt [7]:

$$\begin{aligned}\sigma_\vartheta = p\frac{E_\vartheta}{E_{11}} \Big\{ &\Big[-\cos^2(\varphi) + (k+n)\sin^2(\varphi)\Big] k\cos^2(\vartheta) \\ &+ \Big[(1+n)\cos^2(\varphi) - k\sin^2(\varphi)\Big]\sin^2(\vartheta) \\ &- n(1+k+n)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \;\Big\}\;,\end{aligned} \tag{4.17a}$$

$$\text{mit} \quad k = -\mu_1\mu_2 = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}\,, \quad n = -i(\mu_1+\mu_2) = \sqrt{2\left(\frac{E_{11}}{E_{22}} - \nu_1 2\right) + \frac{E_{11}}{G_{12}}}\,, \tag{4.17b}$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{E_\vartheta} = \frac{\sin^4(\vartheta)}{E_{11}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}}\right)\sin^2(\vartheta)\cos^2(\vartheta) + \frac{\cos^4(\vartheta)}{E_{22}}\,. \tag{4.17c}$$

Der Parameter φ beschreibt in welchem Winkel die äußere Last in Bezug auf die x-Achse angreift (vgl. Abbildung 4.4). In dieser Arbeit wird nur der Fall $\varphi = 0$ betrachtet.

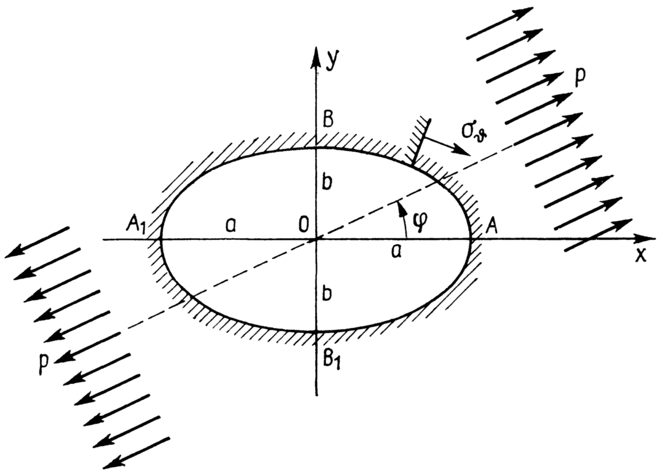


Abbildung 4.4: Problemdarstellung der unendlichen großen Platte mit angreifender Spannung p unter dem Winkel φ in Bezug auf die x-Achse [7]

Um die Radialspannung in Längs- Quer- und Schubspannungen darstellen zu können, wird die Transformationsmatrix aus Gleichung 3.26 auf σ_ϑ angewandt (invers, da um einen negativen Winkel θ gedreht wird). Außerdem wird die zu Beginn des Abschnittes erwähnte Geometriefunktion zur Betrachtung der gesamten Platte an die Spannung multipliziert:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{R}{r}\begin{bmatrix}\sigma_{xx,\vartheta}\\ \sigma_{yy,\vartheta}\\ \tau_{xy,\vartheta}\end{bmatrix} = \frac{R}{r}\,[T]^{-1}\cdot\vec{\sigma}_\vartheta \quad \text{mit} \quad \vec{\sigma}_\vartheta = \begin{bmatrix}0\\ \sigma_\vartheta\\ 0\end{bmatrix}\,, \tag{4.18}$$

wobei R der Radius der Aussparung ist, r den radialen Abstand vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt auf der Platte darstellt und der Spannungsvektor $\vec{\sigma}_\vartheta$ die Spannungskomponenten auf dem Aussparungsrand beinhaltet.

4.2 Vorgehensweise zur Berechnung der Spannungsverteilung

Der erste Schritt zur Bestimmung der Spannungsverteilungen in den einzelnen Lagen besteht darin, die Materialeigenschaften des Laminates über die CLT zu berechnen. Dazu werden die Materialeigenschaften der UD- und Metallschicht benötigt, sowie die Lagenanteile und die Laminatdicke.

Aus den Materialeigenschaften der UD-Schicht werden anschließend die Steifigkeitsmatritzen für die Lagen mit 0°, ±45° und 90° Orientierung (in Anlehnung an den Versuch aus Abschnitt 7) bestimmt. Dazu werden zunächst die einzelnen Steifigkeiten für eine 0°-Lage über Gleichung 3.20a berechnet und anschließend mit der Transformationsmatrix aus Gleichung 3.26 auf die übrigen Orientierungen bezogen[3]:

$$[Q]_\theta = [T]_\theta \cdot [Q]_{0^\circ} \cdot [T]_\theta^{-1} \quad \text{mit :}$$

$$[T]_{+45^\circ} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, [T]_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } [T]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

wobei die ±45°-Lagen im Weiteren immer zusammen betrachtet werden und deshalb für die Steifigkeitsmatrix gilt:

$$[Q]_{45^\circ} = \frac{1}{2}\left([Q]_{+45^\circ} + [Q]_{-45^\circ}\right) . \tag{4.20}$$

Alternativ können die Materialeigenschaften für ein Laminat der Form [+45°, −45°] über die CLT berechnet und danach in Gleichungen 3.20a eingesetzt werden, um die Steifigkeiten ohne den Einsatz der Transformationsmatrix zu berechnen. Die Steifigkeitsmatrix der Metalllage wird wie die der 0°-Lage aus Gleichungen 3.20a berechnet, wobei die Materialeigenschaften der Metalllage verwendet werden.

Der nächste Schritt besteht darin, die äußeren Lasten (p bzw. σ^∞) zu bestimmen. Dies erfolgt im Fall von Ukadgaonker und Rao über Gleichungen 4.8a-c und für die beiden anderen Methoden über Teilen der Kraft durch die Angriffsfläche. Zusätzlich zu den Steifigkeitsmatritzen wird die Nachgiebigkeitsmatrix des Laminates über Gleichungen 3.20b berechnet.

Im letzten Schritt wird die Spannungsverteilungen des Laminates über die in Abschnitt 4 vorgestellten Methoden berechnet und anschließend, falls gewünscht, in Gleichung 3.25 eingesetzt, um die Spannungen in den Einzellage bestimmen zu können. Abbildung 4.5 fasst die ebenen genannten Schritte in Form eines Flussdiagrammes zusammen.

[3]Berechnung der Steifigkeiten aus den gedrehten Materialeigenschaften unter Verwendung von Gleichungen 3.29a-e ist auch möglich

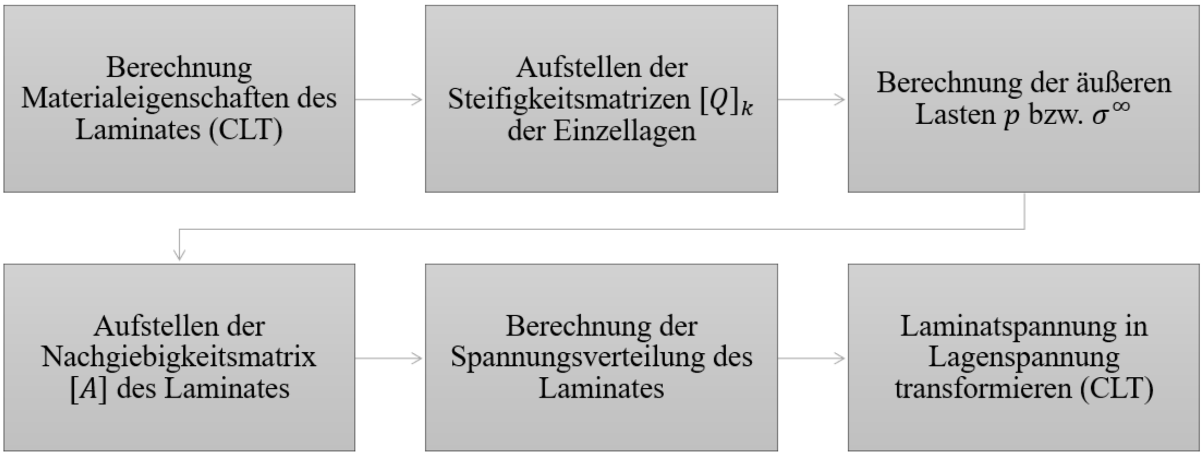


Abbildung 4.5: Schrittweises Vorgehen zur Bestimmung der Spannungsverteilung im Laminat bzw. in den Einzelschichten

5 Parameterstudie

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der in Abschnitt 4 hergeleiteten Methoden auf Veränderungen der Parameter untersucht werden. Alle Effekte werden unter Verwendung der Spannung σ_{xx} generiert, da diese die dominierende Spannung darstellt, können jedoch auf die Anderen übertragen werden. Aus Gleichungen 4.4a-c, 4.9a-c und 4.18 geht hervor, dass alle Methoden von vier Parametern abhängig sind, nämlich äußere Last p, Bohrungsdruchmesser $d\,(= 2\mathrm{R})$ sowie komplexe Parameter μ_1 und μ_2, wobei die komplexen Parameter beide durch die Materialeigenschaften des Laminates bestimmt und aus diesem Grund als ein Parameter betrachtet werden:

$$\vec{\sigma} = f(p,\, d,\, \mu)\,. \tag{5.1}$$

Im Weiteren werden jeweils zwei Parameter konstant gehalten, um den Einfluss des Dritten beobachten zu können. Abbildung 5.1 verbildlicht die Plattengeometrie mit Durchmesser d, Weite w sowie Länge $l = 2e$ und zeigt in rot gezeichnet die Bereiche der Platte, für die im Folgenden die Spannungskurven gezeichnet werden.

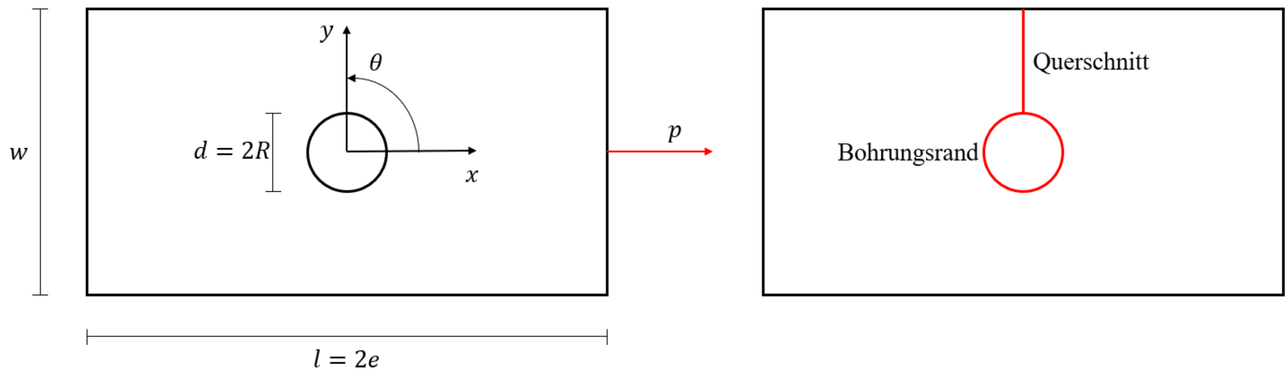


Abbildung 5.1: Geometrie einer Open-Hole-Tension-Probe mit Durchmesser d, Weite w, Länge l und Winkel θ; die Zugbelastung erfolgt in x-Richtung (links); Querschnitt der Platte und Bohrungsrand für die später die Spannungskurven dargestellt werden (rechts)

5.1 Dimensionslose Darstellung

Die eben erwähnten Gleichungen aus Abschnitt 4 werden hier in Erinnerung gerufen und auf den in Abbildung 5.1 dargestellten Fall angewandt. Das heißt, dass der Biaxialitätsfaktor λ gleich Null und die Winkel unter denen die äußere Last bei Ukadgaonker und Rao bzw. Lekhnitskii angreift gleich 90° bzw. 0° gesetzt werden ($\beta = 90°$, $\varphi = 0$). Es wird ausschließlich die Spannung in Zugrichtung (σ_{xx}) betrachtet, da diese im Zugversuch dominiert. Mit diesen Randbedingungen folgen die Gleichungen:

Soutis und Filiou:
$$\sigma_{xx} = p + \mathrm{Re}\left\{\frac{p}{\mu_1 - \mu_2}\left[\frac{-i\mu_1^2}{1+i\mu_1}\left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - R^2\left(1+\mu_1^2\right)}}\right) + \frac{i\mu_2^2}{1+i\mu_2}\left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - R^2\left(1+\mu_2^2\right)}}\right)\right]\right\},$$

Ukadgaonker und Rao:
$$\sigma_{xx} = p + 2\mathrm{Re}\left\{\frac{2\mu_1^2}{R}\left[\frac{-a_3}{b_1\left(\frac{x^2-y^2+2ixy}{R^2}\right) - a_2}\right] + \frac{2\mu_2^2}{R}\left[\frac{a_4}{b_2\left(\frac{x^2-y^2+2ixy}{R^2}\right) - a_2}\right]\right\},$$

Lekhnitskii:
$$\sigma_{xx} = \frac{R}{r}\left\{p\frac{E_\theta}{E_{11}}\left[(k+n)\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right]k\right\}\sin^2(\theta)\,.$$

Durch normieren der Spannung mit der äußeren Last (σ/p) und des radialen Abstandes mit dem Bohrungsradius (r/R) kann eine dimensionslose Darstellung aller Methoden erzielt werden, welche einen qualitativen Vergleich der Methoden untereinander ermöglicht. Abbildung 5.2 zeigt einen Plattenquerschnitt für ein QI-Laminat mit äußerer Last p. Dieser Querschnitt wird ebenfalls in allen weiteren Diagrammen als Referenz verwendet.

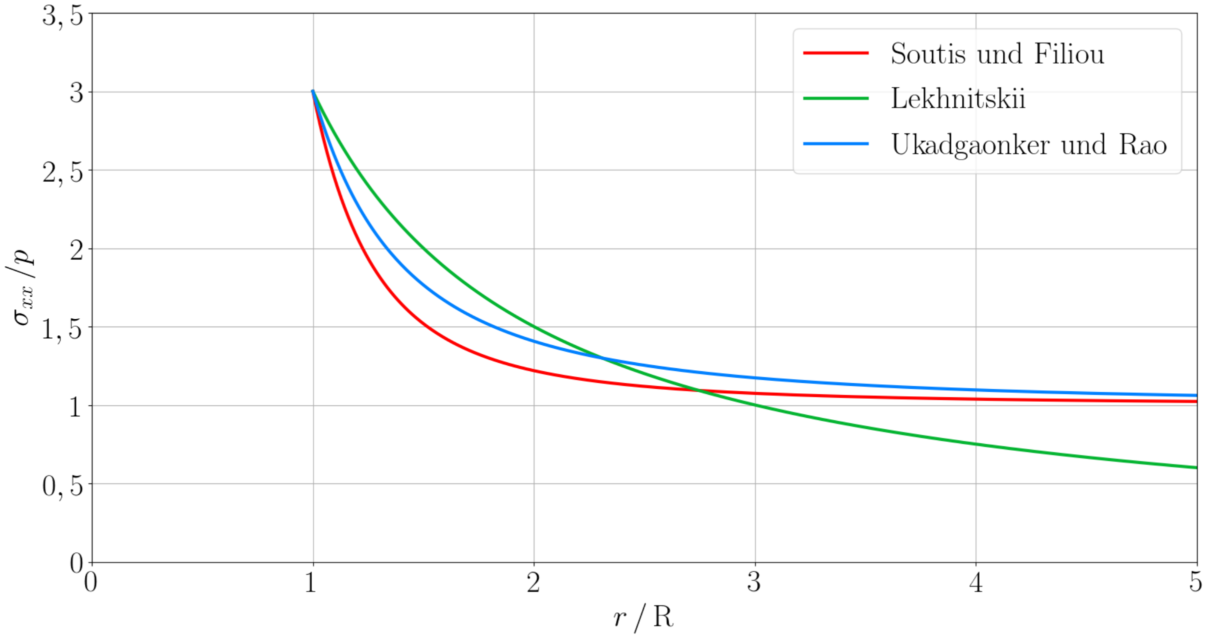


Abbildung 5.2: Dimensionsloser Vergleich der drei Methoden am Beispiel eines Querschnittes durch ein QI-Laminates aus M21/T700GC unter dem Winkel $\theta = 90°$

Die komplexen Parameter für QI-Laminate entsprechen denen von isotropen Materialien. Aus diesem Grund nimmt der Spannungskonzentrationsfaktor (engl.: SCF), also das Verhältnis aus σ_{xx} zu p, am Bohrungsrand ($r = R$) den Wert 3 an, wie es auch generell bei isotropen Materialien der Fall ist [7]. Für andere Laminate, also von $\pm i$ abweichende komplexe Parameter, liegen folglich andere SCF vor (vgl. Abbildung A.1).

Es ist auffällig, dass sich die Methoden von Soutis und Filiou sowie Ukadgaonker und Rao[4] asymptotisch dem SCF = 1 annähern, die von Lekhnitskii jedoch nicht. Der Grund dafür ist der in Abschnitt 4 vorgestellte Ansatz, die Spannung mit $^{R}/_{r}$ zu multiplizieren. Die Kurve von Lekhnitskii kann daher eher als eine mathematische Methode angesehen werden, welche die Spannungen an einem beliebigen Punkt der Platte auf Grundlage der Spannung am Bohrungsrand bestimmt. Die anderen Methoden berechnen die Spannungen der Platte auf der Basis von mechanischen Zusammenhängen und stellen somit eher physikalische Methoden dar.

Eine weitere Beobachtung ist, dass die Verläufe von Soutis und Ukadgaonker sehr ähnlich sind, wobei Ukadgaonker stets größere Werte annimmt und somit für eine Vorauslegung konservativere Ergebnisse liefert, als die Methode von Soutis. Wie sich bei der Betrachtung des Materialeinflusses auf die Spannungsverteilung noch zeigen wird, kann der Kurvenverlauf von Lekhnitskii stark von den anderen beiden abweichen, behält aufgrund des Vorfaktors jedoch immer seine globale Form bei, die durch die Funktion $f(x) = {}^{1}/_{x}$ beschrieben wird.

5.2 Einfluss des Bohrungsdurchmessers

Es soll nun untersucht werden, welchen Einfluss der Bohrungsdurchmesser auf die Spannungsverteilung in der Platte hat. Dazu werden drei beliebige Durchmesser gewählt ($d = 5\,\mathrm{mm}$, $d = 10\,\mathrm{mm}$ und $d = 20\,\mathrm{mm}$), die sich in der Größenordnung der später durchgeführten Versuche befinden (vgl Abschnitt 7). Als Werkstoff wird ein QI-Laminat aus dem Material M21/T700GC verwendet. Die außen angreifende Spannung wird auf 150 MPa festgelegt. Die entsprechenden Kurvenverläufe für die mittleren Spannung im Laminat sind in Abbildung 5.3 dargestellt.

Die Kurvenverläufe von Soutis und Ukadgaonker nähern sich, wie bereits zuvor in der Beschreibung der dimensionslosen Darstellung festgestellt, asymptotisch der äußeren Last. Die Kurve von Lekhnitskii fällt kontinuierlich und nähert sich für eine unendlich große Entfernung dem Wert Null. Es ist ersichtlich, dass der Bohrungsdurchmesser keinen Einfluss auf die Spannung am Bohrungsrand hat, da die Spannung bei dem Verhältnis $^{r}/_{R} = 1$ für alle Durchmesser den gleichen Wert annimmt (vgl. Tabelle 5.1). Diese Beobachtung trifft für alle Kurvenverläufe zu.

[4] zur Abkürzung wird im Weiteren nur jeweils der erste Autor genannt

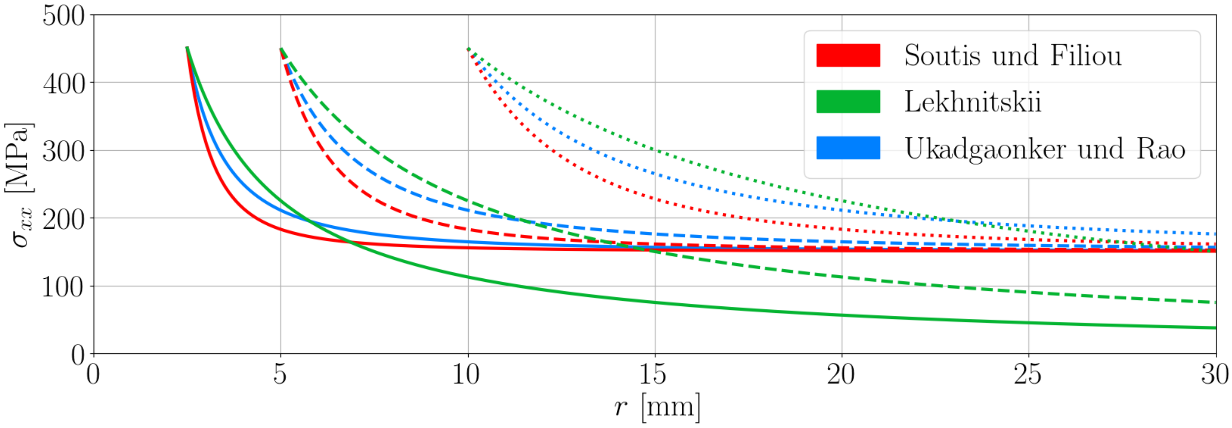


Abbildung 5.3: Einfluss der Variation des Bohrungsdurchmessers auf die Kurvenverläufe aller Methoden für ein QI-Laminat aus M21/T700GC mit Weite $w = 60\,\text{mm}$ unter konstanter äußerer Last (gepunktet: $d = 20\,\text{mm}$, gestrichelt: $d = 10\,\text{mm}$, durchgezogen: $d = 5\,\text{mm}$)

Aus dem im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen dimensionslosen Diagramm (vgl. Abbildung 5.2) geht hervor, dass für jedes $^r/_R$-Verhältnis ein spezifischer SCF existiert. Diese Tatsache kann in Abbildung 5.3 wiedergefunden werden, indem die Spannungen für ein exemplarisches Verhältnis (in diesem Fall $^r/_R = 2$) in einer Tabelle zusammengetragen werden (vgl. Tabelle 5.1). Im Fall von Soutis beträgt der SCF für das gegebene Verhältnis beispielsweise ungefähr $1,2$ (vgl. Abbildung 5.2), sodass gezeigt werden kann:

$$\text{Soutis}: \quad p \cdot \text{SCF} \approx 150\,\text{MPa} \cdot 1,2 \approx 180\,\text{MPa} \approx \sigma\left(^r/_R = 2\right) .$$

Es fällt auf, dass die Spannungen aller Kurven innerhalb einer Methode beim gleichen $^r/_R$-Verhältnis identisch sind, wie es durch das dimensionslose Diagramm bereits beschrieben wurde, die Abstände zum Bohrungsrand jedoch nicht. Daraus folgt, dass eine Veränderung des Bohrungsdurchmessers zu keiner Verschiebung der Spannungskurven auf der x-Achse führt, sondern zu einer Streckung. Der Faktor wird dabei durch das Verhältnis der Durchmesser festgelegt.

Tabelle 5.1: Vergleich der Spannungen σ_{xx} für ein QI-Laminat belastet durch die konstante Spannung $p = 150\,\text{MPa}$ für verschiedene Bohrungsdurchmesser und $^r/_R$ Verhältnisse

	Soutis		Ukadgaonker		Lekhnitskii	
	$\sigma\left(^r/_R = 1\right)$	$\sigma\left(^r/_R = 2\right)$	$\sigma\left(^r/_R = 1\right)$	$\sigma\left(^r/_R = 2\right)$	$\sigma\left(^r/_R = 1\right)$	$\sigma\left(^r/_R = 2\right)$
$d = 5\,\text{mm}$	450 MPa	180 MPa	450 MPa	210 MPa	450 MPa	225 MPa
$d = 10\,\text{mm}$	450 MPa	180 MPa	450 MPa	210 MPa	450 MPa	225 MPa
$d = 20\,\text{mm}$	450 MPa	180 MPa	450 MPa	210 MPa	450 MPa	225 MPa

Der Effekt, dass die Spannung in Laminaten mit kleinen Bohrungsdurchmessern rapider abfällt als in Laminaten mit größeren Bohrungsdurchmessern (vgl. Abbildung 5.3), wird in der Literatur als Hole Size Effekt bezeichnet [27]. Auf der linken Seite von Abbildung 5.4 werden zwei exemplarische Bohrungen mit den Radien $R = 0,1\,\text{mm}$ bzw. $R = 1\,\text{mm}$ dargestellt, deren Bohrungsränder sich in einem Punkt auf der rechten Seite überlagern. In diesem Punkt starten ebenfalls die Abszisse, auf welcher der Abstand zum Bohrungsrand aufgetragen ist und die Ordinate, welche die normierte Spannung aufzeigt. Im Diagramm sind die Spannungsverläufe für beide Bohrungsdurchmesser zu sehen. Es fällt auf, dass die Kurve des kleineren Durchmessers in der Nähe der Bohrung rapide sinkt, während die des größeren Durchmessers einen langsamen Abfall zeigt. Dies bedeutet, dass Laminate mit kleineren Bohrungen hauptsächlich in unmittelbarer Nähe des Bohrungsrandes belastet werden, während die Spannungen in Laminaten mit größeren Durchmessern über eine größere Strecke verteilt sind. Diese Tatsache bestätigt die aus Abbildung 5.3 gezogene Erkenntnis, dass der Bohrungsdurchmesser als Streckungsfaktor interpretiert werden kann. Auf der rechten Seite von Abbildung 5.4 ist das gleiche Diagramm wie in Abbildung 5.3 dargestellt, wobei nur die Methode von Soutis betrachtet und die Abszisse angepasst wird, um mit der aus der Literatur übereinzustimmen. Ein Vergleich der beiden Diagramme zeigt eine deutliche Übereinstimmung und beweist den Effekt.

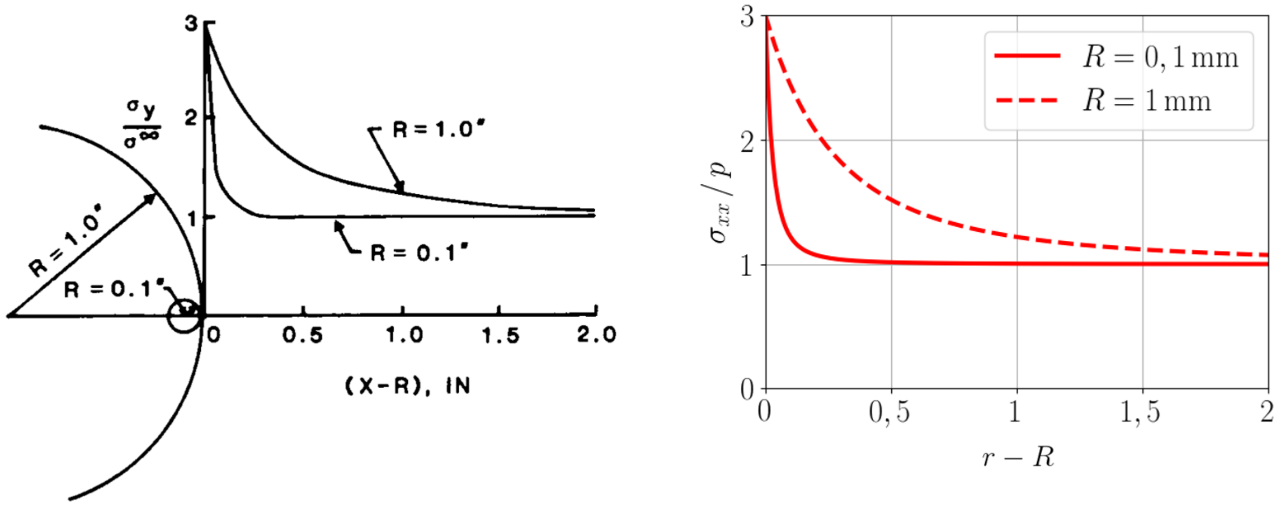


Abbildung 5.4: Dimensionslose Darstellung der Spannung in Zugrichtung in einem isotropen Laminat für unterschiedliche Bohrungsdurchmesser; links die Darstellung aus der Literatur [27] wobei $\sigma_y = \sigma_{xx}$, $\sigma_\infty = p$ und $X = r$; rechts die Spannungsverläufe von Soutis

5.3 Einfluss der äußeren Belastung

Der Einfluss der äußeren Last auf die Spannungsverteilung wird analog zum Vorgehen zur Ermittlung des Einflusses des Bohrungsdurchmessers aus Abschnitt 5.2 ermittelt. Zunächst werden drei äußere Spannungen festgelegt, die zu sichtbaren Unterschieden zwischen den Kurvenverläufen führen, nämlich 50 MPa, 150 MPa und 300 MPa. Das Laminat ist weiterhin quasi-isotrop und hat nun einen festen Bohrungsdurchmesser von 10 mm. Die Kurvenverläufe sind in Abbildung 5.5 dargestellt.

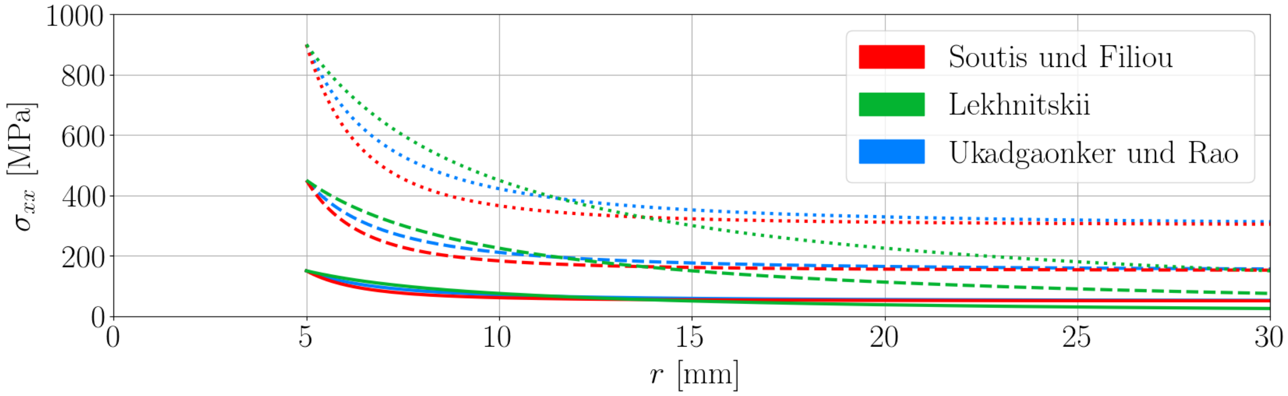


Abbildung 5.5: Einfluss der Variation der äußeren Last auf die Kurvenverläufe aller Methoden für ein QI-Laminat aus M21/T700GC mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und konstantem Bohrungsdurchmesser (gepunktet: $p = 300\,\mathrm{MPa}$, gestrichelt: $p = 150\,\mathrm{MPa}$, durchgezogen: $p = 50\,\mathrm{MPa}$)

Wie zuvor nähern sich die Kurven von Soutis und Ukadgaonker, im Gegensatz zu der von Lekhnitskii, asymptotisch der jeweiligen äußeren Last. Alle Kurven starten wegen des konstanten Bohrungsdurchmessers bei $r = 5\,\mathrm{mm}$. Die Spannungen am Bohrungsrand sind im Vergleich zum vorherigen Abschnitt unterschiedlich. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 5.2 kann eine Tabelle erstellt werden, in der die Spannungen aller Kurven für die Verhältnisse $r/R = 1$ und $r/R = 2$ aufgetragen werden (vgl. Tabelle 5.2). Vergleicht man die Spannungen innerhalb einer Methode für unterschiedliche r/R-Verhältnisse wird ersichtlich, dass die Spannungsdifferenzen mit zunehmendem Abstand vom Bohrungsrand kleiner werden. Eine Veränderung der äußeren Spannung führt folglich nicht zu einer Verschiebung der Spannungskurven in y-Richtung, sondern zu einer Streckung, wobei der Streckungsfaktor aus dem Verhältnis der äußeren Lasten gebildet werden kann. Folglich kann die äußere Last p, analog zum vorangegangenen Abschnitt, als ein Streckungsfaktor der Spannungsverteilung in y-Richtung betrachtet werden.

Tabelle 5.2: Vergleich der Spannungen für ein QI-Laminat mit konstantem Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter variierender Belastungen und r/R Verhältnissen

	Soutis		Ukadgaonker		Lekhnitskii	
	σ ($r/R = 1$)	σ ($r/R = 2$)	σ ($r/R = 1$)	σ ($r/R = 2$)	σ ($r/R = 1$)	σ ($r/R = 2$)
$p = 50\,\mathrm{MPa}$	150 MPa	70 MPa	150 MPa	80 MPa	150 MPa	80 MPa
$p = 150\,\mathrm{MPa}$	450 MPa	180 MPa	450 MPa	210 MPa	450 MPa	225 MPa
$p = 300\,\mathrm{MPa}$	900 MPa	360 MPa	900 MPa	420 MPa	900 MPa	450 MPa

5.4 Einfluss des Materials

Das Material beeinflusst die Spannungsverteilung indirekt über die komplexen Parameter. Dabei fungieren sowohl die Orientierungen als auch der Laminatanteil der einzelnen UD-Schichten als Stellgrößen. Die im Folgenden zu untersuchenden Laminataufbauten sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. die UD-Laminate werden auf Grund ihrer stark richtungsabhängigen Eigenschaften und die übrigen Laminate wegen ihrer Bedeutung in realen Strukturen betrachtet. Für alle Laminate wird eine Weite w von 60 mm, ein Bohrungsdurchmesser d von 10 mm und eine äußere Spannung p von 150 MPa angenommen.

Tabelle 5.3: Laminataufbauten der zu untersuchenden OHT-Proben (St = Stahl)

Probenbezeichnung	Laminataufbau
UD-Laminat 0°	$[0_9]_s$
UD-Laminat 90°	$[90_{16}]_s$
Flügellaminat (FL)	$[[0/+45/0/-45/0/0/90/0]_2]_s$
Hybridisiertes Flügellaminat (HFL)	$[[0/St/0/St/0/0/St/0]_2]_s$
QI-Laminat	$[[+45/90/-45/0]_4]_s$

In Abbildung 5.6 werden die Kurvenverläufe aller Laminataufbauten für alle Methode verglichen. Die generelle Form der Kurvenverläufe wurde bereits in den vorherigen Abschnitten beschrieben und wird auch hier wiedergefunden.

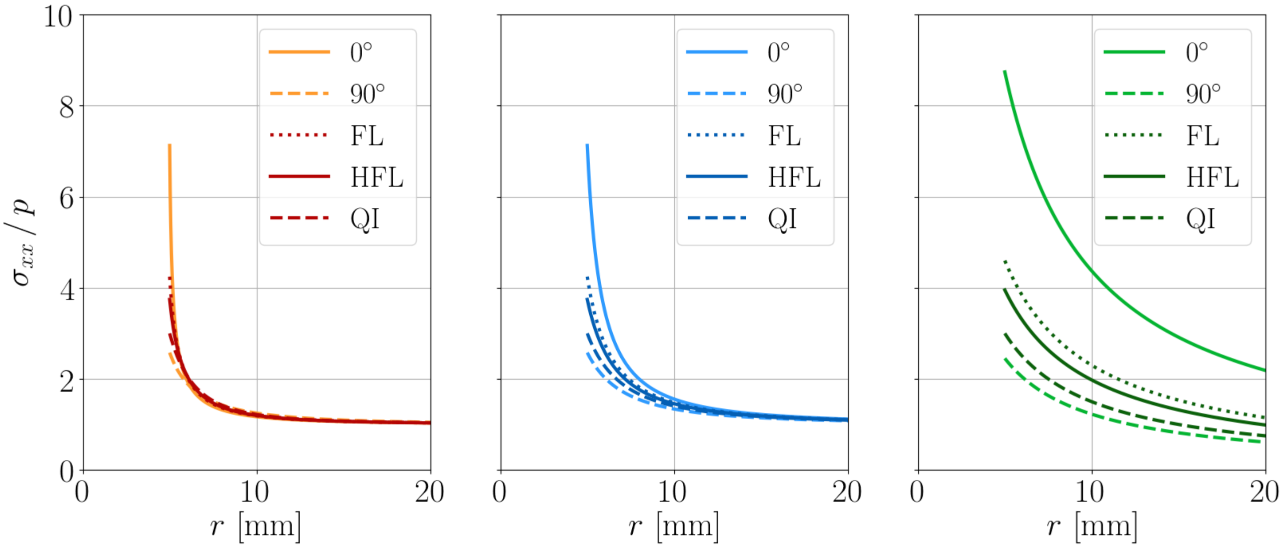


Abbildung 5.6: Einfluss des Laminataufbaus auf die Kurvenverläufe der Spannungsverteilung aller Methoden mit Weite $w = 60$ mm, konstantem Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm und normierter Last (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii)

Die Spannungen am Bohrungsrand unterscheiden sich für unterschiedliche Laminataufbauten in allen Methoden. Dabei lässt sich feststellen, dass der SCF vom Grad der Anisotropie abhängt, sodass die Spannungsüberhöhung am Bohrungsrand in stark anisotropen Laminaten (große Differenz zwischen den komplexen Parametern) intensiver ist, als bei weniger Anisotropen. Eine direkte Abhängigkeit vom Elastizitätsmodul kann durch Substitution einzelner Lagen durch Stahl widerlegt werden. So ist bspw. der Elastizitätsmodul vom HFL ($E_{11} = 140306$ MPa) größer als der vom 0°-Laminat ($E_{11} = 125490$ MPa), jedoch ist der SCF im ersten Fall kleiner.

Sollte der Elastizitätsmodul senkrecht zur Belastungsrichtung jedoch größer sein als in Belastungsrichtung, führen große Differenzen zwischen den komplexen Parametern zu niedrigeren Spannungsüberhöhungen als im isotropen Fall (vgl. das 90°-Laminat). Um die Spannungsüberhöhung eines beliebigen Laminates also einschätzen zu können, sollten zunächst die Elastizitätsmodule in Zugrichtung und senkrecht dazu verglichen werden, um entscheiden zu können, ob die Spannungsüberhöhung höher oder niedriger als im isotropen Fall ausfällt. Anschließend kann durch Bilden der Differenz aus den komplexen Parametern die Stärke der Überhöhung eingeschätzt werden.

Eine Besonderheit der Methode von Soutis ist, dass sich die Spannungskurven kreuzen. Dieses Verhalten tritt unabhängig von den übrigen Parametern auf und lässt sich weder bei Ukadgaonker noch Lekhnitskii wiederfinden. Abbildung 5.7 zeigt das Kurvenschneiden bei Soutis und im Vergleich dazu die Verläufe von Ukadgaonker, die für alle Abstände größere Spannungen annehmen (vgl. Abbildung 5.8).

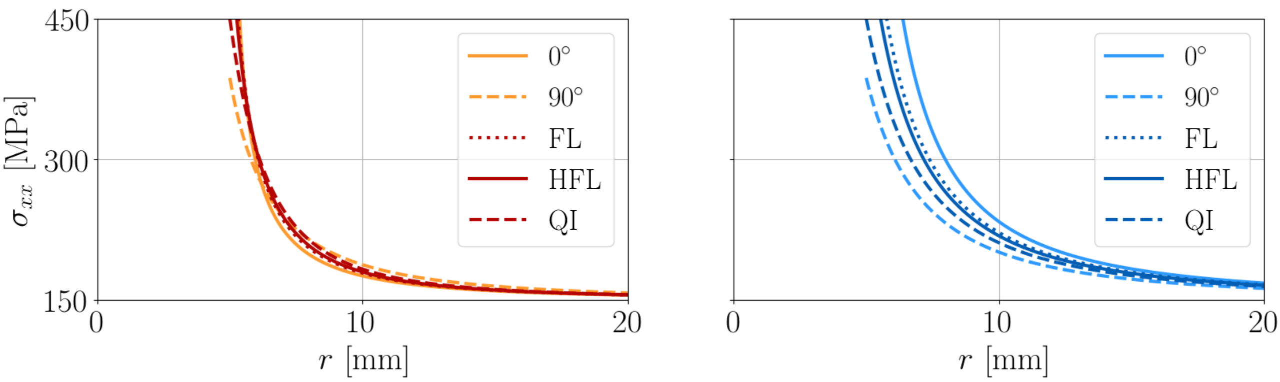


Abbildung 5.7: Vergleich der Spannungsverläufe von Soutis (links) mit denen von Ukadgaonker (rechts) für verschiedene Laminataufbauten

Vergleicht man die Flächeninhalte unterhalb der Kurven bzw. die über den Querschnitt gemittelten Spannungen miteinander, fällt auf, dass sich die Ergebnisse für die Methode von Soutis kaum unterscheiden (vgl. Tabelle 5.4[5]). Der Effekt, welcher aus den sich kreuzenden Kurven resultiert, steht in Einklang mit der Annahme, dass die zu übertragene Kraft im Inneren der Probe unabhängig vom Material sein und der äußeren Kraft entsprechen soll. Eine genaue Erforschung dieses Phänomens wäre im Rahmen dieser Arbeit jedoch zu weitreichend und wird deshalb nicht weiter verfolgt.

[5]Numerisch in Python über die Simpsonregel bestimmt

Tabelle 5.4: Integrale der über den Querschnitt verteilten Spannungen in N/mm; in Klammern die auf die Querschnittslänge bezogene mittlere Spannung $\overline{\sigma}_{xx}$ in MPa

	Soutis und Filiou	Ukadgaonker und Rao	Lekhnitskii
UD-0°	4436,8 (177,4)	5517,5 (220,7)	11742,9 (469,7)
UD-90°	4428,3 (177,1)	4626,1 (185,0)	3294,8 (131,8)
FL	4436,3 (177,5)	5100,1 (204,0)	6179,7 (247,2)
HFL	4436,3 (177,4)	4997,4 (199,9)	5312,2 (212,5)
QI	4435,8 (177,4)	4812,0 (192,5)	4031,5 (161,3)

Ein Vergleich der Spannungsverteilungen für ausgewählte Laminate (vgl. Abbildung 5.8) ermöglicht einen genaueren Vergleich der einzelnen Methoden untereinander. Die Spannung am Bohrungsrand ist bei Soutis und Ukadgaonker in jedem Fall identisch, jedoch nicht verglichen mit Lekhnitskii. Letztere Methode beginnt abhängig davon, ob der Elastizitätsmodul des Laminates in Zugrichtung oder senkrecht dazu größer ist, bei einer höheren bzw. niedrigeren Spannung, als die anderen Methoden (vgl. Abbildung 5.8). Allgemein lässt sich sagen, dass die Kurven von Soutis und Ukadgaonker sehr ähnlich verlaufen und sich lediglich in ihrer Steigung unterscheiden, die am Bohrungsrand im Falle von Soutis stets betragsmäßig am größten ist. An den Kurvenverläufen von Lekhnitskii lässt sich der mathematische Charakter der mit dem geometrischen Vorfaktor multiplizierten Methode gut erkennen.

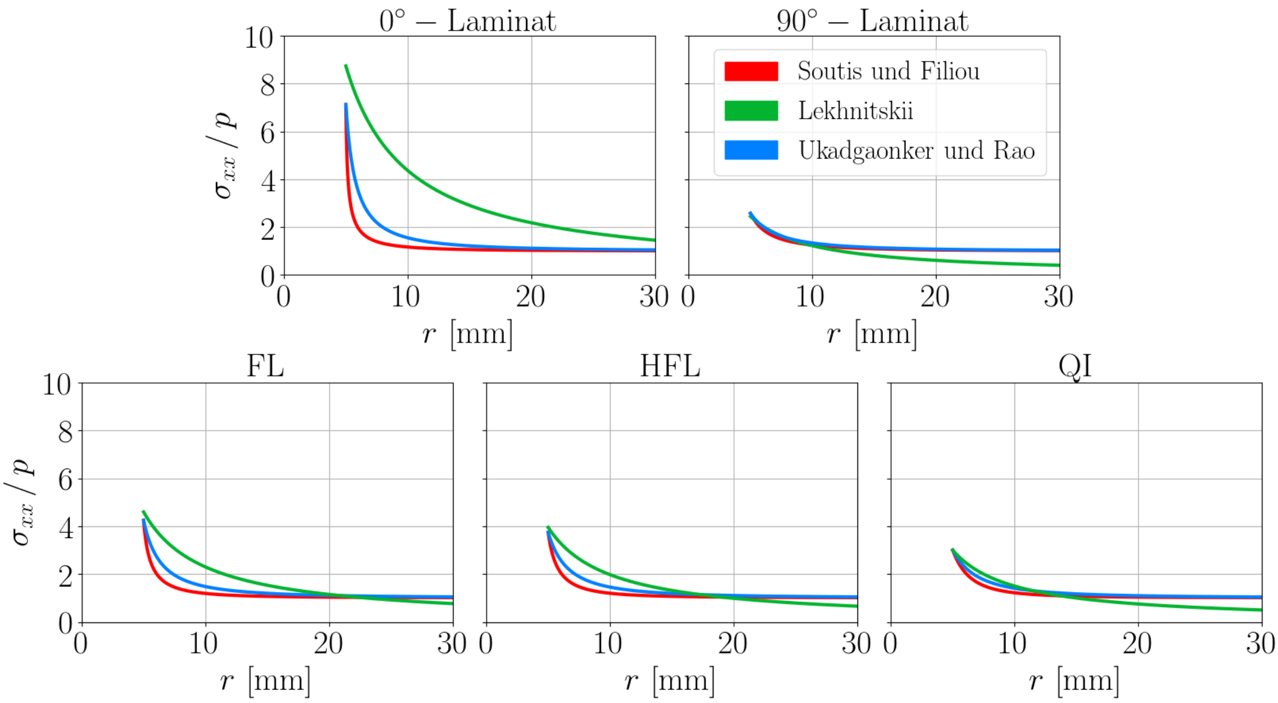


Abbildung 5.8: Vergleich der Methoden für spezifische Laminataufbauten; oben die reinen UD-Laminate und unten die gemischten Laminate mit Weite $w = 60\,\text{mm}$, konstantem Bohrungsdurchmessser $d = 10\,\text{mm}$ unter konstanter äußerer Last $p = 150\,\text{MPa}$

Besonders beim 0°-Laminat zeigt sich die dadurch entstehende Abweichung von den anderen beiden Funktionen. Das 0°-Laminat weist die größte Differenz zwischen den komplexen Parametern auf (vgl. Tabelle 7.2). Aus diesem Grund fällt, wie in Abbildung 5.8 zu sehen, die Spannungsüberhöhung am Bohrungsrand in diesem Laminat am stärksten aus. Auch die Differenz zwischen der Methode von Lekhnitskii und den anderen beiden ist in diesem Fall am größten.

Das 90°-Laminat ist besonders, da es das einzige der untersuchten Laminate ist, dessen Elastizitätsmodul senkrecht zur Zugrichtung größer ist, als in Zugrichtung. Diese Tatsache lässt sich in Abbildung 5.8 dadurch erkennen, dass der Kurvenverlauf von Lekhnitskii am Bohrungsrand bei einer niedrigeren Spannung startet, als die anderen Methoden. Zudem ist auffällig, dass dieses Laminat das mit der niedrigsten Spannungsüberhöhung am Bohrungrand aus den untersuchten Laminaten ist. Die Kurvenverläufe des FL und des HFL sind sehr ähnlich, weisen allerdings verschiedene Spannungsüberhöhungen vor. So führt die Substitution einzelner Lagen durch Stahl zu einer Spannungsreduktion über den gesamten Querschnitt.

Das QI-Laminat wurde bereits in Abbildung 5.2 in der dimensionslosen Form behandelt. Es sei jedoch erwähnt, dass die komplexen Parameter für die Methode von Soutis angepasst werden müssen, da in der entsprechenden Formel (vgl. Gleichung 4.4) durch die Differenz der komplexen Parameter geteilt wird und dies bei den komplexen Parametern $\mu_1 = \mu_2 = i$ nicht erlaubt ist. Aus einer Betrachtung der komplexen Parameter (vgl. Abbildung A.2) stellten sich die Werte:

$$\mu_1 = \left(1 + 10^{-6}\right) i\,,$$
$$\mu_2 = \left(1 + 10^{-7}\right) i\,,$$

als beste Annäherungen heraus. Die komplexen Parameter sind dabei so nahe Eins wie möglich zu wählen, um das Materialverhalten nicht zu beeinflussen und ohne dabei Funktionsrauschen (vgl. Abbildung A.2) hervorzurufen, welches durch Annäherung an die Anomalie entsteht, bei der durch die Differenz der komplexen Parameter geteilt wird.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Einfluss des Materials auf die Spannungsverteilung vor allem vom Grad der Anisotropie abhängt. Zusätzlich ist von Bedeutung, ob der Elastizitätsmodul in Zugrichtung oder senkrecht dazu größer ist. Es sollte jedoch beachtet werden, dass es einige Unterschiede zwischen den Methoden gibt (z.B. Kurvenschneiden), sodass weitere Untersuchungen auch an anderen Laminataufbauten durchgeführt werden müssen, um zwischen allgemeinen und laminatspezifischen Einflüssen unterscheiden zu können.

6 Spannungen am Bohrungsrand und in Einzellagen

In der Parameterstudie wurden die Wirkungen der Parameter auf die Spannungsverteilung untersucht. Gleichzeitig wurden die Spannungsverläufe in Querschnitten unter 90° vorgestellt, um das Verhalten der Spannung in Abhängigkeit vom Abstand zur Bohrung zu untersuchen. Der Winkel wurde auf 90° festgelegt, da der Querschnitt in diesem Fall die geringste Länge aufweist und folglich die größten Spannungsüberhöhungen erfährt. Zu einer anderen Darstellungsform der Spannungsverteilung gelangt man, wenn der Radius festgelegt und der Winkel variiert wird. In den folgenden Abschnitten wird die Spannungsverteilung in diesen zum Ursprung konzentrischen und zur Ebene koplanaren Kreisen dargestellt, um den Einfluss des Winkels auf die Spannungsverteilung zu untersuchen. Dabei werden zunächst die Spannungen im Laminat betrachtet. Anschließend folgt eine Untersuchung der Spannungen in den einzelnen Lagen.

6.1 Untersuchung der Spannungsverteilung am Bohrungsrand

Bei Platten, an denen die äußeren Lasten gleichmäßig verteilt angreifen und in Hauptachsenrichtung zeigen, liegt neben der normalen Punktsymmetrie am Ursprung zusätzlich Achsensymmetrie vor [7]. Dies gilt jedoch nur für Normal- und nicht für Schubspannungen. Bei Achsensymmetrie genügt es ein Viertel des Bohrungsrandes zu betrachten, da sich das Muster für den restlichen Rand wiederholt. Der Vollständigkeit wegen wird hier allerdings der komplette Bohrungsrand betrachtet. Abbildung 6.1 zeigt die Spannungsverteilung für zwei Laminataufbauten, nämlich ein 0°-Laminat (oben) und ein QI-Laminat (unten). Die Werte für den Winkel 90° bzw. 270° lassen sich auch in den Diagrammen aus Abbildung 5.8 wiederfinden, da beide Kurven den Punkt auf der Platte mit $\theta = 90°$ und $r/R = 1$ enthalten.

Es fällt auf, dass die Kurvenverläufe von Soutis und Ukadgaonker identisch für das 0°-Laminat sind und sich von Lekhnitskii unterscheiden. Der Spannungsunterschied zwischen den Kurven unter 90° ist auch in Abbildung 5.8 für $r = 5\,\text{mm}$ zu sehen, da sowohl der Querschnitt als auch der Bohrungsrand den eben genannten Punkt enthalten. Abbildung 6.1 zeigt, dass eine ausschließliche Betrachtung der Spannungsverteilung in einem Querschnitt (vgl. Parameterstudie in Abschnitt 5) nicht ausreicht um die Unterschiede der Methoden vollständig zu repräsentieren. So liegen beispielsweise die Kurvenverläufe von Lekhnitskii im Winkelintervall 70°-110° bzw. 250°-290° am Bohrungsrand über denen von Soutis und Lekhnitskii, für andere Winkel jedoch nicht. Die Kurvenverläufe in einem Querschnitt sind folglich vom Winkel abhängig unter dem der Schnitt erfolgt. Für die Winkel $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ nimmt die Spannung σ_{xx} in allen Methoden unabhängig vom Laminataufbau den Wert Null an. In der Umgebung dieser Punkte verlaufen alle Kurven durch den negativen Spannungsbereich, sagen also Druckspannungen voraus. Im Fall identischer komplexer Parameter (QI-Laminat) überlagern sich alle Methoden.

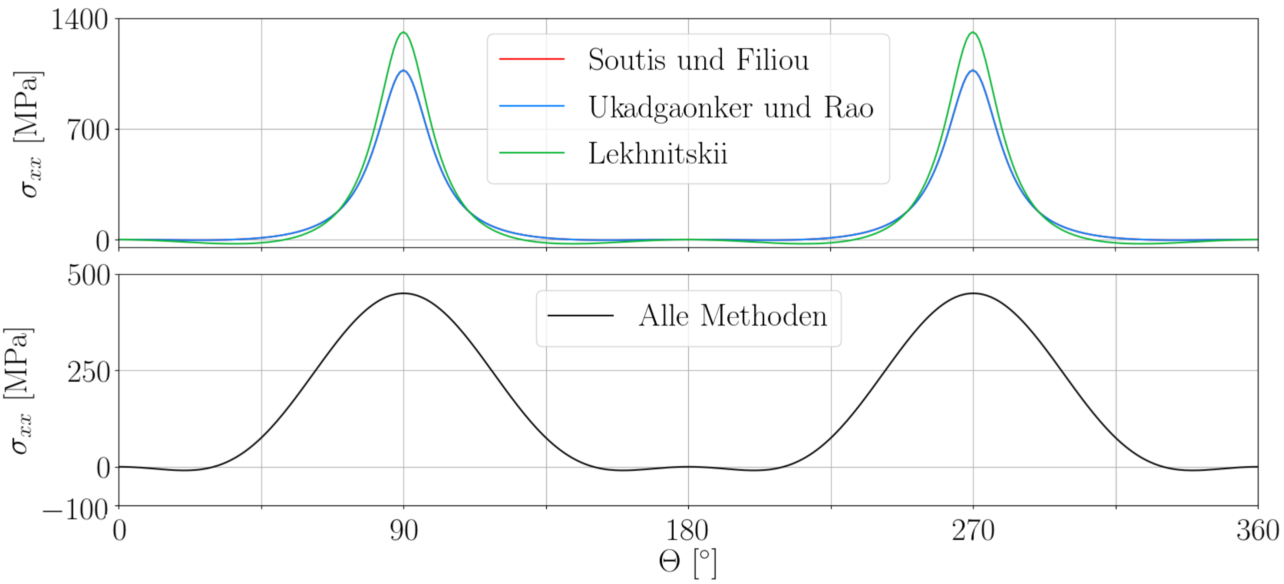


Abbildung 6.1: Spannungsverteilung um den Bohrungsrand eines 0°- (oben) und eines QI-Laminates (unten) mit Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter der konstanten Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$; alle Methoden bilden den gleichen Verlauf ab

Betrachtet man die Spannungen nicht in einem Kreis, der mit dem Bohrungsrand zusammenfällt, sondern einen größeren Durchmesser hat ($D = 12\,\mathrm{mm}$), verändern sich die Spannungsverläufe, wie in Abbildung 6.2 dargestellt.

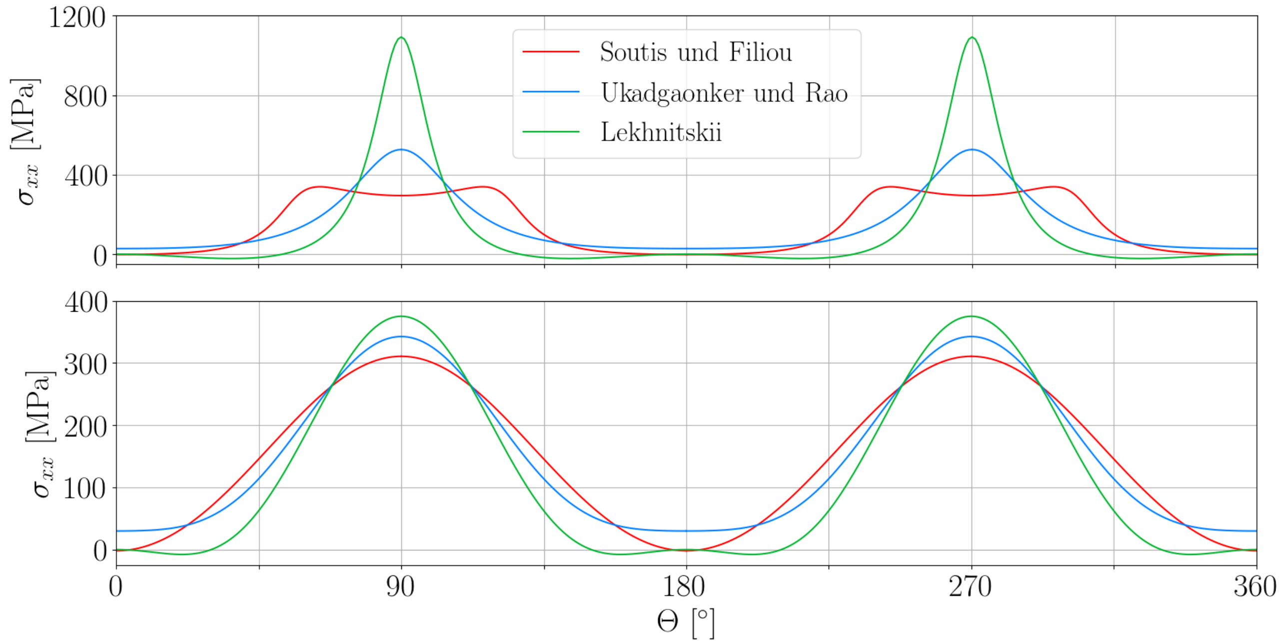


Abbildung 6.2: Spannungsverteilung auf einem Kreis mit Durchmesser $D = 12\,\mathrm{mm}$ eines 0°- (oben) und eines QI-Laminates (unten) der Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ mit Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter der konstanten Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$

Die Kurven von Soutis und Ukadgaonker, welche sich am Bohrungsrand überlagern, unterscheiden sich nun stark voneinander. Die Kurve von Lekhniskii verläuft ähnlich wie zuvor und flacht lediglich etwas ab. Ein großer Unterschied zwischen Soutis und den anderen Methoden ist, dass die Kurve von Soutis im 0°-Laminat zwei zusätzliche Maxima aufweist. Außerdem befinden sie sich nicht wie zuvor bei den Winkeln $\theta = 90°$ und $\theta = 270°$ sondern symmetrisch in Zweierpaaren darum verteilt und um ca. 30° zu den Seiten verschoben. Die vorherigen Maxima stellen nun lokale Minima dar. In Abschnitt 8 wird dieser Unterschied erneut aufgegriffen und mit den experimentellen Daten verglichen.

6.2 Spannungsverteilung in den Einzelschichten

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse der Spannungstransformation des Laminates auf die Einzelschichten am Beispiel eines QI-Laminates wiedergegeben werden, da dieses die größte Anzahl unterschiedlicher Lagenorientierungen aus den untersuchten Laminaten aufweist. Ein Vergleich mit experimentellen Daten ist mit der in Abschnitt 7 vorgestellten Auswertungssoftware nicht möglich, da nur Daten für das Laminat berechnet werden können. Aus dem Laminataufbau (vgl. Tabelle 5.3) geht hervor, dass die Lagen mit 0°-, 45°- und 90°-Orientierung betrachtet werden müssen. Da alle Lagen die gleiche Dehnung erfahren[6], fallen die Spannungen in den Lagen, welche eine größere bzw. kleinere Steifigkeit als das Laminat aufweisen, größer bzw. kleiner aus als die über die Laminatdicke gemittelte Spannung. Abbildung 6.3 verbildlicht diese Tatsache am Beispiel eines QI-Laminates.

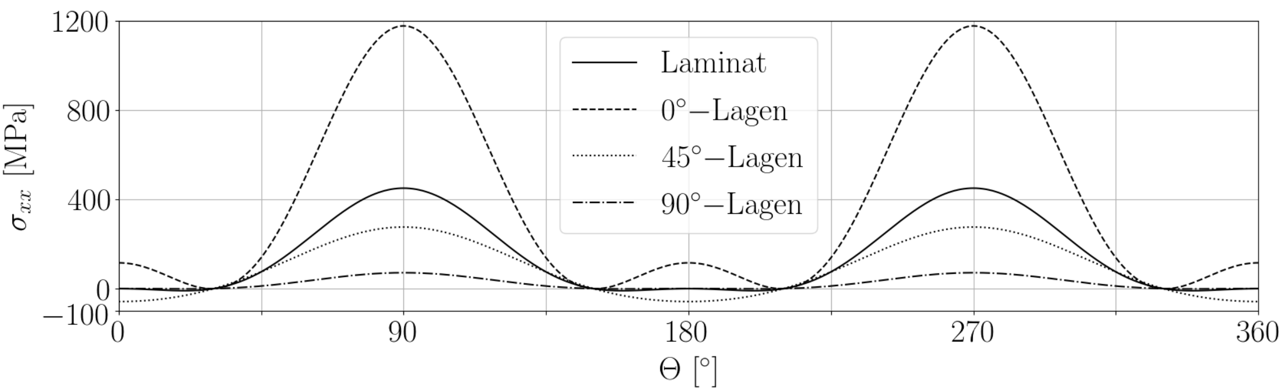


Abbildung 6.3: Spannungsverteilung um den Bohrungsrand eines QI-Laminates mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ (Überlagerung aller Methoden)

Es ist ersichtlich, dass in den 0°-Lagen, welche den größten Elastizitätsmodul in Zugrichtung (x-Richtung) besitzen, die größten Spannungen (σ_{xx}) im Vergleich zu den anderen Lagen und

[6] Das Laminat erfährt vereinfacht unter Belastung eine über die Dicke konstante Dehnung; da die einzelnen Lagen fest miteinander verbunden sind, erfahren somit alle Lagen die gleiche Dehnung wie das Laminat

dem Laminat zu finden sind. Die übrigen Orientierungen sind weniger belastet als das Laminat. Für den vorliegenden Fall eines QI-Laminates überlagern sich die Kurven aller Methoden, wie bereits im vorangegangenen Abschnitt festgestellt wurde. Der SCF kann auch Werte kleiner als Eins annehmen, wie es in diesem Beispiel für die 90°-Lagen der Fall ist. Auffällige Punkte befinden sich bei $\theta \approx 150°$ bzw. $\theta \approx 210°$, da sich an diesen Stellen alle Kurven im Wert Null schneiden. Der Effekt, welcher zu diesem Phänomen führt, wird hier nicht weiter erforscht. Zwischen den eben genannten Winkeln durchläuft die Kurve der 90°-Lagen den Wert Null bei $\theta = 180°$. Gleichzeitig erfahren die Kurve der 0°- und 45°-Lagen ein lokales Maximum im Zugbereich bzw. globales Minimum im Druckbereich. Die Kurven gleichen sich gegenseitig aus, sodass die Kurve des Gesamtlaminates ebenfalls den Wert Null annimmt.

Vergleicht man die Spannungskurven in einem Kreis um den Ursprung, der einen größeren Durchmesser als die Bohrung hat, überlagern sich die Kurven der Methoden nicht mehr und es ergibt sich das in Abbildung 6.4 dargestellte Bild. Die Verteilung der Spannung auf die einzelnen Lagen ist annähernd wie zuvor, allerdings gibt es Unterschiede innerhalb der Methoden.

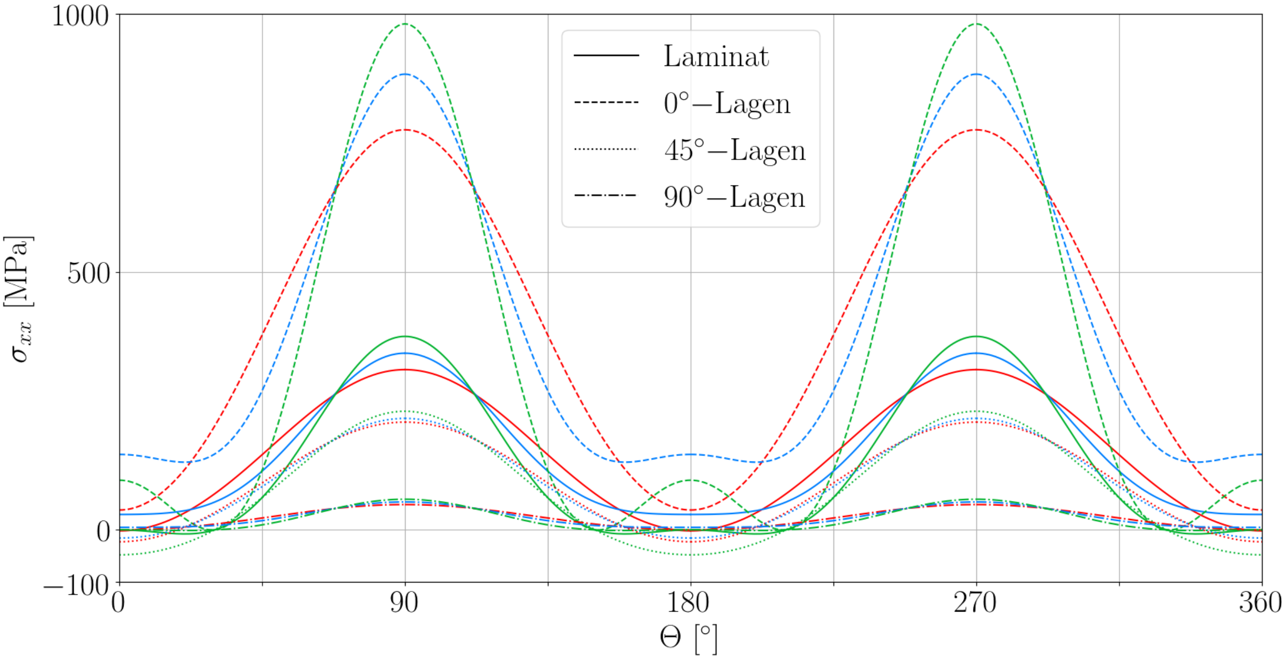


Abbildung 6.4: Vergleich der Spannungsverläufe aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60\,\text{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\text{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\text{MPa}$ in einem Kreis um den Ursprung mit Durchmesser $D = 12\,\text{mm}$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii)

Die Verläufe von Lekhnitskii stimmen im qualitativen Verhalten mit den vorherigen Kurven überein. Der Grund dafür ist der mathematische Charakter der Methode, sodass sich mit zunehmendem Abstand vom Ursprung nur die konkreten Werte, allerdings nicht die Kurvenformen ändern. Auffällig ist, dass die Kurvenverläufe von Soutis und Ukadgaonker für die Einzellagen und das Laminat nicht mehr den Wert Null unter den Winkeln $\theta \approx 150°$ und $\theta \approx 210°$ scheiden. Zusätzlich weisen die Kurvenverläufe von Soutis für die 0°-Lage sowie das Laminat bei den eben genannten Winkel keine Minima mehr auf. Stattdessen halbiert sich die Zahl der Minima auf zwei, die sich bei den Winkeln $\theta = 0°$ bzw. $\theta = 180°$ befinden. Im Gegensatz dazu weisen Ukadgaonker und Lekhnitskii an diesen Stellen lokale Maxima vor. Eine weitere Auffälligkeit existiert bei den Winkel ($\theta \approx 70°$, $\theta \approx 110°$, $\theta \approx 160°$ und $\theta \approx 200°$). An diesen Stellen kreuzen sich alle Kurven der jeweiligen Lagen miteinander. Die Ursache hierfür wird nicht weiter untersucht.

Die Spannungsverläufe in den Querschnitten können ebenfalls in die einzelnen Lagen aufgeteilt werden (vgl. Abbildung 6.5), wie hier am Beispiel eines QI-Laminates gezeigt wird. Dabei sei auf die Ähnlichkeit zu Abbildung 5.5 aus der Parameterstudie hingewiesen. Die einzelnen Lagen verhalten sich dabei wie Laminate unter unterschiedlichen äußeren Lasten. Der Betragsunterschied zwischen den Lasten entstammt der Tatsache, dass die Dehnung des Laminates denen der einzelnen Lagen entspricht. Durch die unterschiedlichen Elastizitätsmodule der Lagen führt dies zu unterschiedlichen Spannungen. Folglich liegen in den einzelnen Lagen auch unterschiedliche SCF vor.

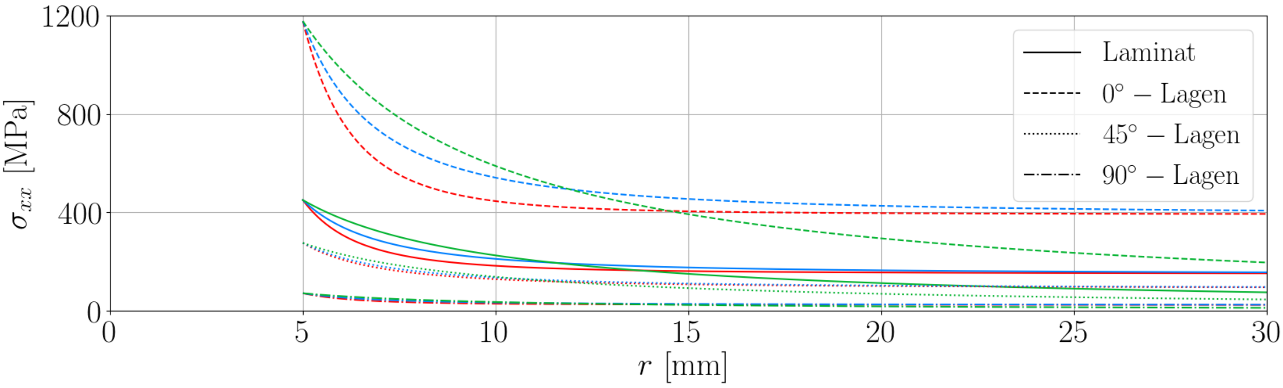


Abbildung 6.5: Vergleich der Spannungsverläufe aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60\,\text{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\text{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\text{MPa}$ im Querschnitt unter $\theta = 90°$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii)

Es sollen nun die Diagramme der übrigen Spannungen (σ_{yy} und τ_{xy}) vorgestellt werden, wobei zunächst die Spannung senkrecht zur Zugrichtung (σ_{yy}) am Beispiel des QI-Laminates untersucht wird. Abbildung 6.6 zeigt die Spannungsverläufe in den Einzellagen sowie des Laminates um den Bohrungsrand. Dabei überlagern sich alle Methoden in den jeweiligen Lagen. Im Gegensatz zu den Verläufen von σ_{xx} fällt auf, dass hohe Druckbelastungen vorliegen. Der Grund dafür ist die durch die äußere Belastung hervorgerufene Querkontraktion des Laminates. Besondere Punkte stellen die Winkel $\theta = 0°$, $\theta = 90°$, $\theta = 180°$ und $\theta = 270°$ dar, da an diesen Punkten alle Kurven Extremwerte annehmen, nämlich lokale Minima bzw. globale Minima und Maxima.

Wie bereits zuvor bei der Spannung in Zugrichtung (vgl. Abbildung 6.4 für σ_{xx}) schneiden sich alle Kurven für die Winkel $\theta \approx 150°$ und $\theta \approx 210°$.

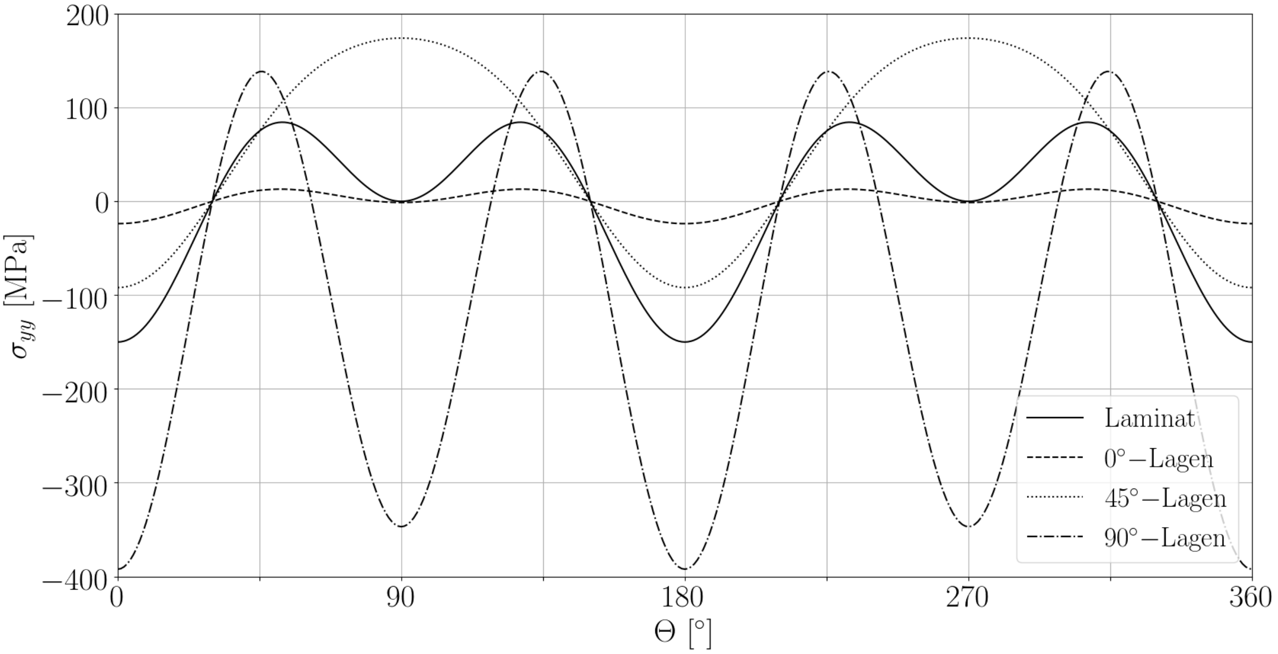


Abbildung 6.6: Spannungsverteilung σ_{yy} um den Bohrungsrand eines QI-Laminates mit Weite w = 60 mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa (Überlagerung aller Methoden)

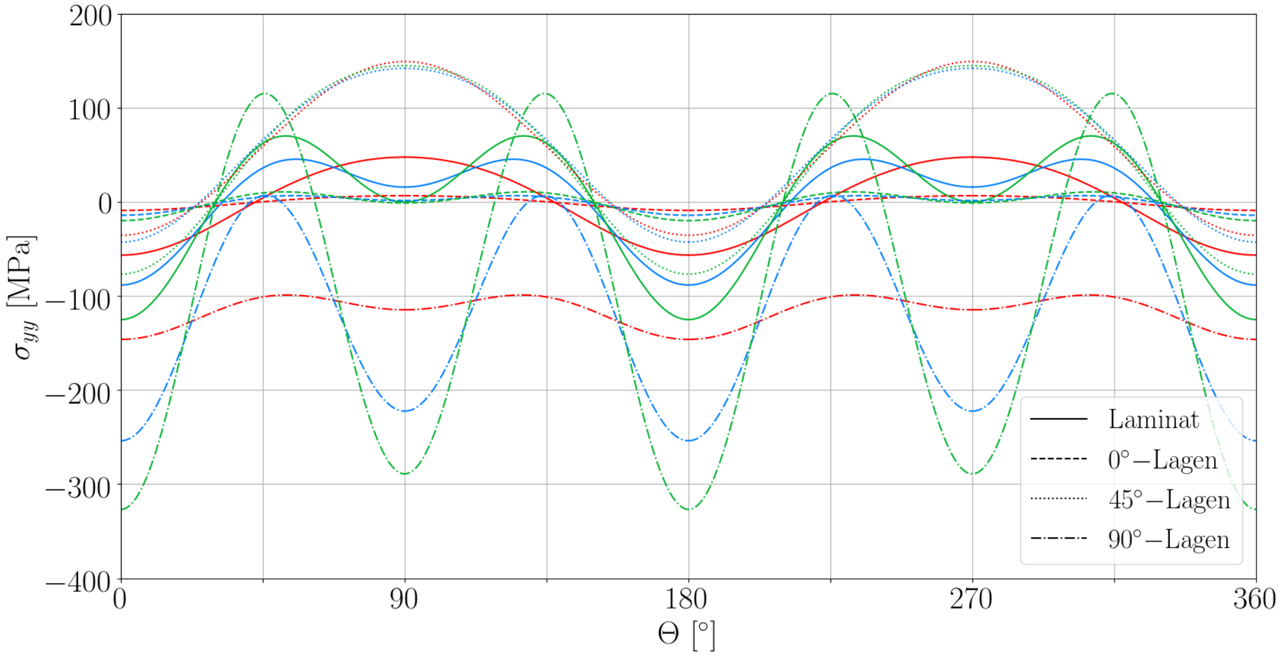


Abbildung 6.7: Vergleich der Spannungsverläufe σ_{yy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60$ mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa in einem Kreis um den Ursprung mit Durchmesser $D = 12$ mm (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii)

In Abbildung 6.7 wird die Spannungsverteilung σ_{yy} entlang eines Kreises mit größerem Durchmesser als dem der Bohrung in den Einzellagen und dem Laminat betrachtet. Im Vergleich zum Bohrungsrand bleiben die qualitativen Kurvenverläufe der Spannung annähernd gleich. Dennoch lassen sich signifikante Unterschiede für die Verläufen der Spannungskurven von Soutis für die 90°-Lage und das Laminat finden. Gleichzeitig kommt es zu quantitativen Unterschieden, wie sie am Beispiel der 90°- Lagen bei $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ deutlich werden.

In Abbildung 6.8 sind die Spannungsverläufe entlang eines radialen Pfades unter $\theta = 90°$ zu sehen. Man sieht, dass die Spannungen abhängig von der Faserorientierung entweder Zug- oder Druckbelastungen darstellen. Mit Blick auf Materialversagen besteht in Kontaktzonen zwischen 0°- und 90°-Lagen auf Grund der großen Spannungsdifferenzen eine höhere Wahrscheinlichkeit für Delamination.

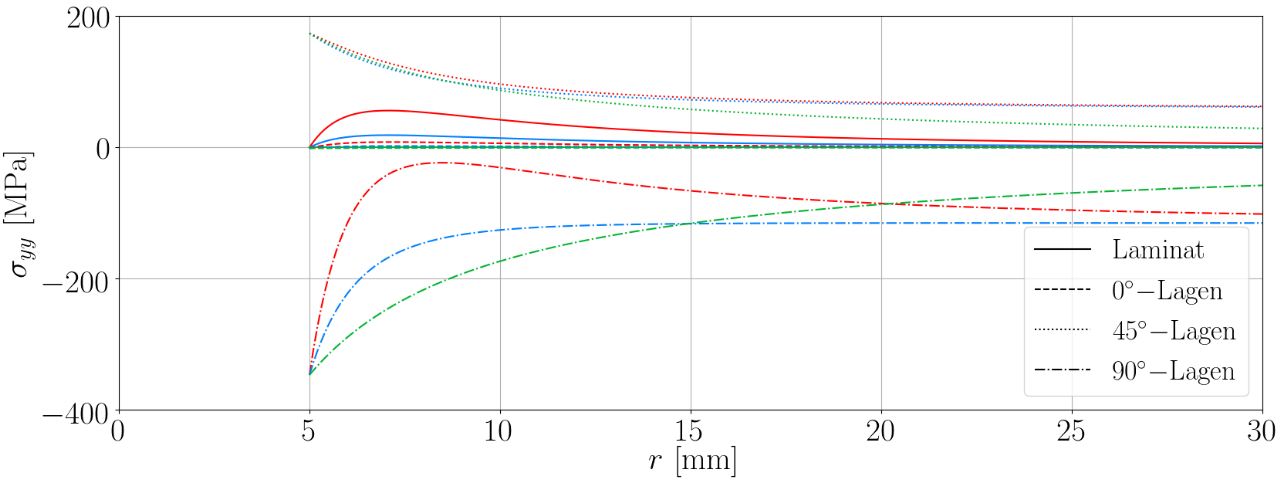


Abbildung 6.8: Vergleich der Spannungsverläufe σ_{yy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60$ mm und Bohrungsdurchmesser $d = 10$ mm unter konstanter Last $p = 150$ MPa im Querschnitt unter $\theta = 90°$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii)

In der Betrachtung der Schubspannung existiert die Besonderheit, dass die Werte der Spannungsverläufe in den 0°- und 90°-Lagen immer identisch sind. Diese Besonderheit beruht auf der Tatsache, dass der Schubmodul in beiden Lagen identisch ist. Des Weiteren liegt bei der Schubspannung keine Achsensymmetrie wie zuvor, sondern Punktsymmetrie vor (vgl. Abbildung 6.9). In den Abbildungen 6.9 und 6.10 sind die Spannungsverteilungen um den Bohrungsrand bzw. entlang eines Kreises mit größerem Durchmesser als dem der Bohrung dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Schubspannungen für die Winkel $\theta = 0°$, $\theta = 90°$, $\theta = 180°$ und $\theta = 270°$ in allen Lagen den Wert Null annehmen. Zwischen diesen Winkeln treten signifikante Unterschiede zwischen den Methoden auf. So weisen die Kurvenverläufe von Ukadgaonker und Lekhnitskii sowohl ein Minimum als auch ein Maximum auf, während die Kurvenverläufe von

Soutis nur ein Extrempunkt besitzen, welcher in Abhängigkeit vom Winkelintervall entweder ein Minimum oder ein Maximum sein kann.

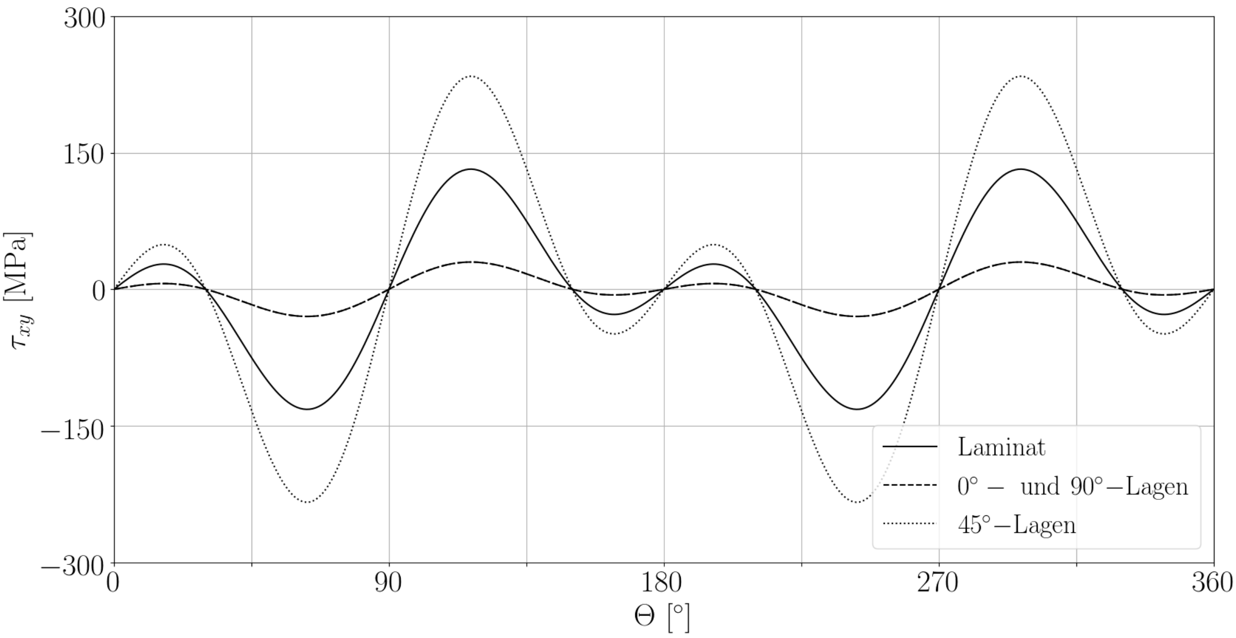


Abbildung 6.9: Spannungsverteilung τ_{xy} um den Bohrungsrand eines QI-Laminates mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ (Überlagerung aller Methoden)

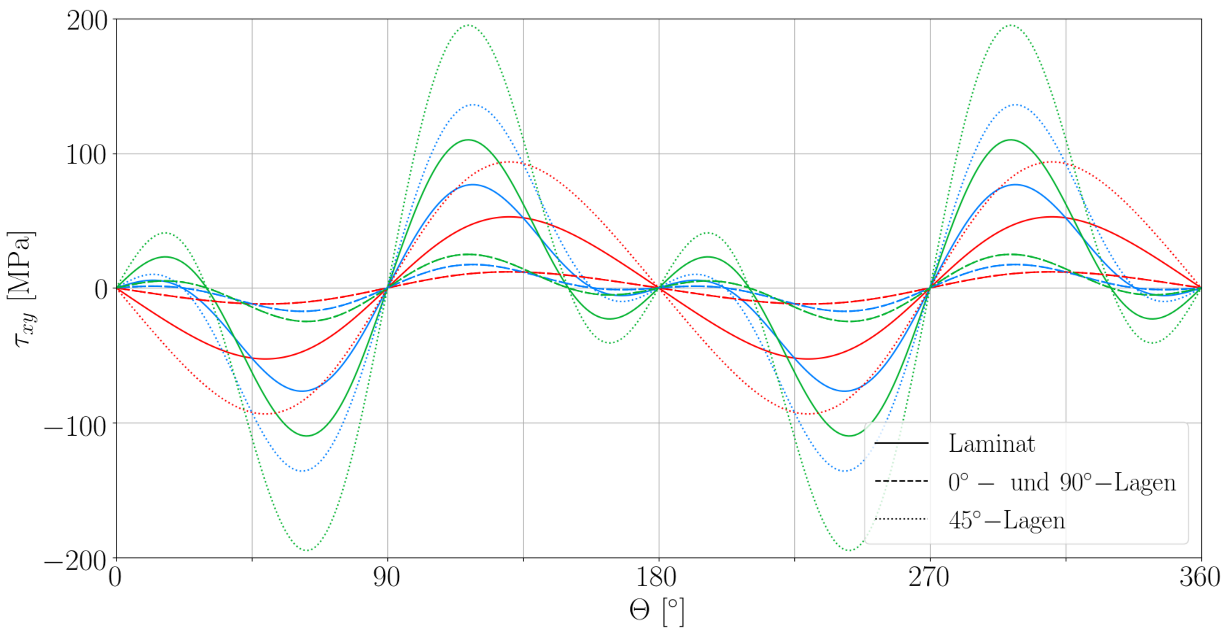


Abbildung 6.10: Vergleich der Spannungsverläufe τ_{xy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60\,\mathrm{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\mathrm{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ in einem Kreis um den Ursprung mit Durchmesser $D = 12\,\mathrm{mm}$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii)

Folglich ist die Steigung der Kurven von Ukadgaonker und Lekhnitskii bei den genannten Winkeln stets positiv, wohingegen Soutis entweder positive oder negative Steigungen annimmt. Dies hat zur Folge, dass Soutis um die Winkel $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ Schubspannungen mit einem anderem Vorzeichen vorhersagt als Ukadgaonker und Lekhnitksii. Eine weitere Folge ist, dass die Schubspannungen in den vier 90°-Intervallen bei Ukadgaonker und Lekhnitskii sowohl positive als auch negative Werte annehmen; Soutis jedoch abhängig vom Intervall ausschließlich positive oder negative Werte annimmt. Eine Besonderheit zwischen den Kurven von Ukadgaonker und Lekhnitskii besteht darin, dass sich die jeweiligen Kurven für die einzelnen Lagen und das Laminat in ihrem Wendepunkt zwischen den Extrempunkten schneiden.

Die Spannungen im Querschnitt werden im Fall von Schubspannungen aufgrund der Nulldurchgänge in 90°-Schritten unter dem Winkel $\theta = 45°$ betrachtet. Die Kurvenverläufe sind in Abbildung 6.11 gezeigt, wobei die Kurven von Soutis und Ukadgaonker wegen des identischen Schubmodules übereinander liegen. Als Resultat der identischen Schubmodule schneiden sich die jeweiligen Kurven von Soutis und Ukadgaonker für alle Lagen und das Laminat unter dem Winkel $\theta = 45°$ bzw. in 90°-Schritten dazu (vgl. Abbildung 6.10).

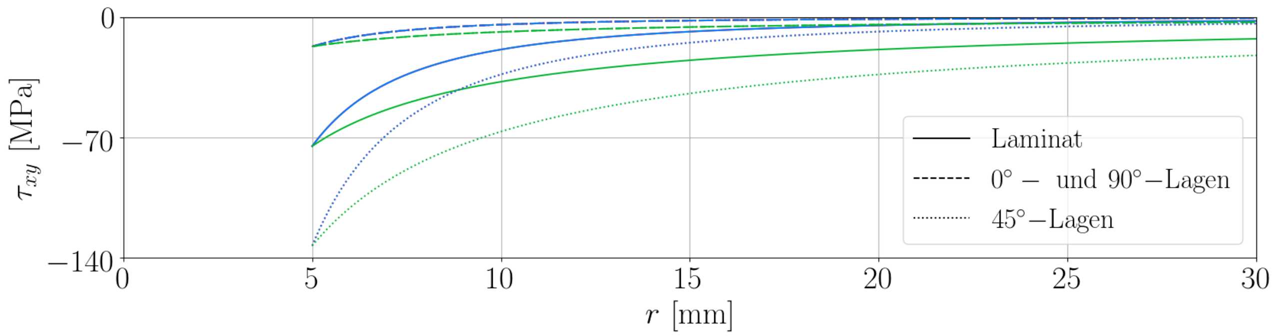


Abbildung 6.11: Vergleich der Spannungsverläufe τ_{xy} aller Methoden an einem QI-Laminat mit Weite $w = 60\,\text{mm}$ und Bohrungsdurchmesser $d = 10\,\text{mm}$ unter konstanter Last $p = 150\,\text{MPa}$ im Querschnitt unter $\theta = 45°$ (In rot Soutis, in blau Ukadgaonker und in grün Lekhnitskii)

In Bezug auf die in diesem Kapitel und der Parameterstudie aus Abschnitt 5 vorgestellten Ergebnissen lassen sich folgende Erkenntnisse festhalten. Um die Spannungsverteilung in Platten mit einer kreisrunden Aussparung analytisch zu bestimmen, reicht es nicht aus nur den Querschnitt oder nur den Bohrungsrand zu betrachten. Die einzelnen Spannungsverläufe unterscheiden sich teilweise stark voneinander und sind sowohl vom Winkel als auch vom Radius abhängig, sodass für die vollständige Beschreibung der Spannungsverteilung in einer Platte und der Unterschiede zwischen den Methoden eine flächige Betrachtung durchgeführt werden muss. Diese wird in Abschnitt 8 vorgestellt und mit den Ergebnissen aus den Versuchen verglichen.

7 Open Hole Tension Versuche

In den folgenden Abschnitten sollen vom DLR durchgeführte Versuche vorgestellt werden, mit Hilfe derer in Abschnitt 8 qualitative und quantitative Vergleiche mit den zu untersuchenden analytischen Methoden erfolgen, um die theoretischen Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten zu validieren. Zunächst werden die verwendeten Materialien vorgestellt und die Probenfertigung kurz dargestellt. Es folgt eine Beschreibung des Versuchsaufbaus und der -durchführung sowie eine kurze Einführung in das Verfahren der digitale Bildkorrelation und die Auswertungssoftware.

7.1 Materialien und Fertigung

Im Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik des DLR wurden Zugversuche an Probekörpern mit einer kreisrunden Aussparung in Braunschweig durchgeführt. Die Materialeigenschaften der verwendeten UD- und Stahllagen sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst.

Tabelle 7.1: Materialeigenschaften einer UD-Lage aus dem Material M21/T700GC und einer isotropen Stahllage aus dem Material St 1.4310 [5]

	E_{11} [MPa]	E_{22} [MPa]	G_{12} [MPa]	ν_{12} [−]
M21/T700GC	125490	8330	4135	0,297
St 1.4310	165000	165000	64000	0,29

Insgesamt wurden 27 verschiedene Konfigurationen[7] geprüft, aus denen im Rahmen dieser Arbeit fünf betrachtet werden, nämlich ein 0°- und ein 90°-Laminat als Vertreter für reine Laminate sowie ein QI-Laminat, ein Flügellaminat und dessen Hybridisierung (Substitution von ±45°- und 90°-Lagen durch Stahllagen) als Vertreter für Laminate mit multiplen Faserorientierungen. Die genauen Lagenaufbauten wurden bereits in der Parameterstudie vorgestellt und sind in Tabelle 5.3 zu finden. Tabelle 7.2 enthält die zugehörigen Material- und Geometrieeigenschaften der Laminate.

Die Proben wurden vor der Versuchsdurchführung unter dem Mikroskop und mit Ultraschall auf Fertigungsfehler geprüft. Abbildung 7.1 zeigt exemplarische Ausschnitte der Proben um die Bohrung. Auf der linken Seite ist die Draufsicht eines 90°-Laminates und auf der rechten Seite der Aufbau eines Laminates, welches zu $62,5\%$ aus 90°- und zu $37,5\%$ aus Stahllagen besteht, zu sehen.

Der Herstellungsprozess der Proben wird den internen Dokumenten entnommen und kurz in einem Flussdiagramm dargestellt (vgl. Abbildung 7.2). Als Prepregmaterial wird HexPly M21/35%/UD134/T700GC verwendet.

[7]Kombinationen unterschiedlicher Bohrungsdurchmesser, Weiten, Längenverhältnissen und Laminataufbauten

Tabelle 7.2: Eigenschaften der in den Zugversuchen untersuchten OHT-Proben

	UD-0°	UD-90°	FL	HFL	QI
E_{xx} [MPa]	125490	8330	86730	140306	47969
E_{yy}[MPa]	8330	125490	29755	69739	47969
G_{xy}[MPa]	4135	4135	11203	26584	18271
ν_{xy} [−]	0,297	0,020	0,311	0,291	0,313
w [mm]	32,01	32,04	60,04	36,12	32,07
d [mm]	6,36	6,34	12,00	12,03	6,34
t [mm]	2,32	4,20	4,19	4,23	4,12
μ_1 [−]	5,4073i	1,3932i	2,5854i	2,0543i	i
μ_2 [−]	0,7178i	0,1849i	0,6603i	0,6905i	i

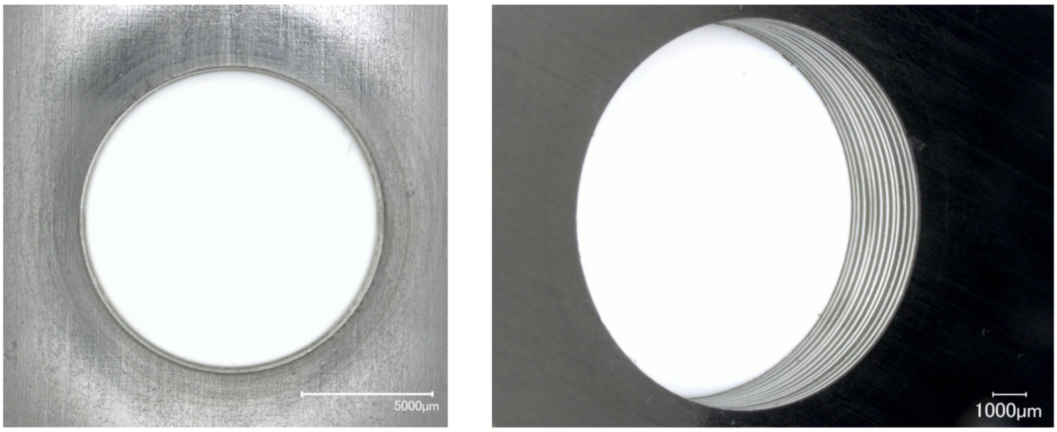


Abbildung 7.1: Draufsicht der Bohrung (links) und Aufnahme unter einem Winkel von 30° (rechts)

Abbildung 7.2: Herstellungsprozess der in den Versuchen untersuchten OHT-Proben

7.2 Versuchsaufbau und -durchführung

Die Versuche wurden an der Prüfmaschine Zwick 1481 der Firma ZwickRoell durchgeführt, welche für die betrachteten Proben auf eine Prüfgeschwindigkeit von 0,5 Millimetern pro Minute eingestellt wurde. Vor Versuchsbeginn wurden die einzelnen Proben mit einem Sprühmuster für die spätere Auswertung versehen (Abbildung 7.3 links) und an beiden Enden mit Hilfe von Backen in die Prüfmaschine eingespannt (Abbildung 7.3 mitte). Vor der Maschine wurde das optische Messsystem ARAMIS aufgebaut, welches über zwei Kameras verfügt, um nicht nur zweidimensionale sondern auch dreidimensionale Betrachtungen zu erlauben (Abbildung 7.3 rechts).

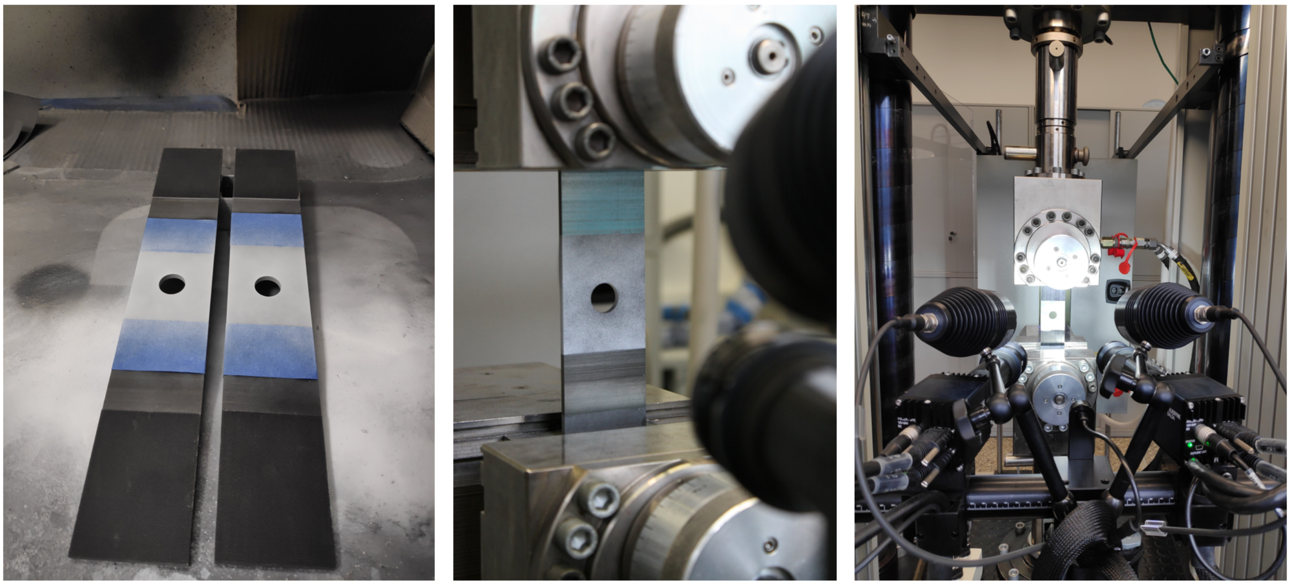


Abbildung 7.3: Stochastisches Muster auf Probenoberflächen (links), Eingespannte Probe (mitte) und gesamter Versuchsaufbau mit ARAMIS System im Vordergrund (rechts)

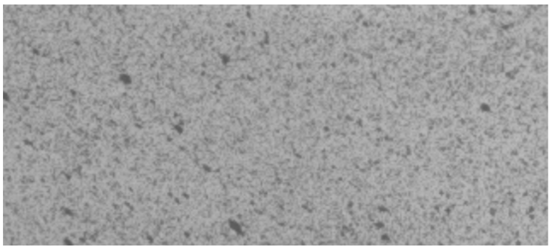
Während der Versuche wurden kontinuierlich Bilder der Probe aufgenommen mit Hilfe derer im Nachhinein die Dehnungen an beliebigen Orten auf der Platte berechnet werden können (vgl. Abschnitt 7.3). Die Proben wurden bis zum Versagen belastet. Abbildung 7.4 zeigt exemplarische Bruchmuster für das 90°- und QI-Laminat.

Als Durchführungsrichtlinie des Versuches wurde die „*Airbus Test Methode zur Bestimmung der Materialfestigkeiten in ebenen, open-hole und filled-hole Proben*“ (AITM 1-0007) verwendet. Die Daten aus den Versuchen werden vom DLR für die Untersuchung in dieser Arbeit bereitgestellt, um mit den Ergebnissen der analytischen Methoden verglichen werden zu können.

Abbildung 7.4: Bruchbilder eines 90°- Laminates (links) und eines QI-Laminates (rechts)

7.3 Hintergrund DIC Methode

Die Methode der digitalen Bildkorrelation (engl.: DIC) wird verwendet, um Verformungen von realen Bauteilen unter dem Einfluss von Lasten zu analysieren und zu quantifizieren. Die Probe wird vor dem Versuchsbeginn mit einem stochastischen Muster belegt (z.B. mit Farbe), um bestimmten Orten auf der Probe bestimmte Muster zur Identifikation zuweisen zu können (vgl. Abbildung 7.5).



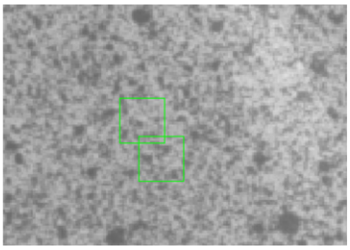


Abbildung 7.5: Stochastisches Muster einer Probe (links) mit eingegrenzten Bereichen (Facetten; rechts) [28]

Während des Verformungsprozesses werden kontinuierlich Bilder der Probe aufgenommen, die später mit Hilfe der Auswertungssoftware in Beziehung zueinander gesetzt werden. Die Bilder werden in kleine Bereiche (Facetten) eingeteilt, deren Größe und Anzahl die Genauigkeit bestimmen. Abbildung 7.6 zeigt eine unverformte Probe zu Versuchsbeginn und eine verformte Probe mit verzerrten Facetten.

In einem iterativen Prozess werden die Ähnlichkeiten von Facetten zur unverfomten Facette mit Hilfe einer Korrelationsfunktion bestimmt, um die Facette mit der höchsten Musterübereinstimmung zu finden. Aus dem Vergleich der unverformten Facette mit der Verzerrten werden dann die Dehnungen berechnet. Die Grundlage für die Ähnlichkteitsberechnung bilden die Methode der Minimierung von Abweichungsquadraten und unterschiedliche Subpixelinterpolationen[8] (z.B. Spline-Interpolation) [28].

[8] Auf eine Erklärung dieser Methoden wird hier verzichtet; siehe [28]

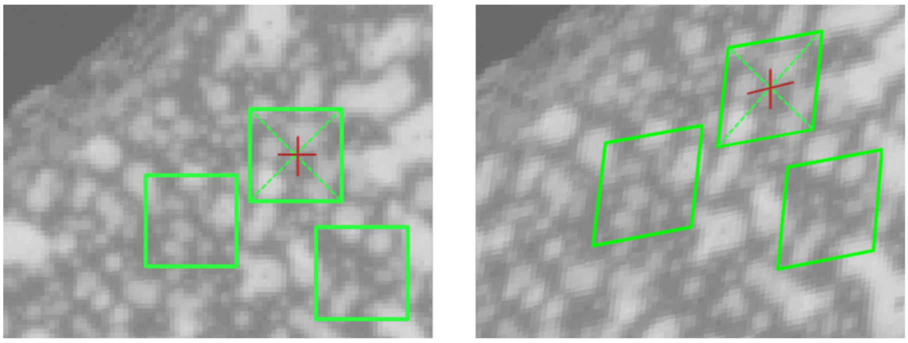


Abbildung 7.6: Unverformte (links) und verformte Probe (rechts) [28]

7.4 Auswertung mit GOM

Zur Auswertung der aufgenommenen Bilder wird die Auswertungssoftware „GOM Correlate“ der GOM GmbH verwendet, welche sich mit digitaler Bildkorrelation und Auswertungen in den Bereichen Material- und Bauteilprüfung beschäftigt. Die während des Versuchs aufgenommenen Bilder werden in das Programm geladen und in einer Timeline organisiert, welche den Versuchsablauf widerspiegelt. Anschließend wird ein Bereich auf der Probe definiert, in dem die Verformungen untersucht werden sollen. In diesem Bereich werden Facetten erstellt mit Hilfe derer die Dehnungen in Zugrichtung und senkrecht dazu sowie die Scherungen auf der gesamten Platte berechnet und sichtbar werden (vgl. Abschnitt 8). Zusätzlich können Schnitte durch die Probe gelegt werden, für die dann ein Diagramm erstellt wird, welches die Dehnungen über den Ort aufträgt. Alternativ können benutzerdefinierte Punkte gesetzt werden, für die die Dehnungen ausgegeben werden. Die Ergebnisse aus der Flächen- Querschnitts- und Bohrungsrandbetrachtung werden in den nächsten Abschnitten präsentiert, analysiert und mit den Ergebnissen der analytischen Methoden verglichen.

8 Vergleich analytischer und experimenteller Ergebnisse

In diesem Abschnitt sollen die in Abschnitt 4 vorgestellten analytischen Methoden mit experimentellen Daten aus den in Abschnitt 7 beschriebenen Versuchen verglichen werden. Dabei werden drei Laminate untersucht, nämlich ein 0°-, ein 90°- und ein QI-Laminat. Zunächst erfolgt eine qualitative Betrachtung des gesamten Laminates, indem die Spannungsverteilungen aus den analytischen Methoden in Dehnungsverteilungen umgerechnet werden[9], um mit den DIC Aufnahmen aus den Versuchen verglichen werden zu können. Anschließend werden die Spannungsverläufe im engsten Querschnitt (vgl. Abschnitt 5) und in Kreisen um den Bohrungsmittelpunkt (vgl. Abschnitt 6) mit den experimentellen Daten verglichen. Die Spannungen an bestimmten Punkten werden dabei über Gleichung 3.18 aus den in der Auswertungssoftware bestimmten Dehnungen berechnet.

Die im weiteren Verlauf betrachteten analytischen und zweidimensionalen Spannungsverteilungen sowie DIC Aufnahmen stellen nicht die gesamte Laminatgeometrie dar, sondern einen Ausschnitt um die Bohrung. Die Gründe hierfür sind zum einen, dass die Spannungsverteilung um den Bohrungsrand von besonderem Interesse ist und daher genauer untersucht werden sollen. Zum anderen ist die Spannungsverteilung in einiger Entfernung von der Bohrung annähernd gleichbleibend, sodass keine neuen Erkenntnisse aus der dortigen Betrachtung gezogen werden können.

8.1 Spannungsverteilung im 0°−Laminat

Eine Berechnung der analytischen Dehnungsverteilung in Zugrichtung (ε_{xx}) für alle Methoden führt zu den in Abbildung 8.1 dargestellten Ergebnissen. Auffällig ist die Verteilung von Lekhnitskii, welche große Unterschiede zu den anderen Methoden aufweist. Dazu gehören zum einen die stark ausgeprägten und radial nach außen auslaufenden Dehnungsüberhöhungen unter den Winkeln $\theta = 90°$ und $\theta = 270°$ und zum anderen die generelle Farbwirkung, die dunkler als in den übrigen Bildern ausfällt. Die dunklere Farbe stellt dar, dass Lekhnitskii für diese Bereiche Dehnungen gleich oder nahe Null vorhersagt, während die anderen Methoden Dehnungen von ca. 0,004 annehmen und somit Zugspannungen auf nahezu der gesamten Fläche vorhersagen. Der in den vorherigen Abschnitten beschriebene mathematische Charakter von Lekhnitskiis Methode lässt sich besonders gut in Abbildung 8.1 erkennen, da die Dehnungs- bzw. Spannungsverteilung des gesamten Laminates ausschließlich von der Verteilung um den Bohrungsrand abhängt. Soutis und Ukadgaonker unterscheiden sich in den Dehnungsüberhöhungen am Bohrungsrand unter den eben genannten Winkeln. Bei Soutis fallen die Dehnungsbereiche eher abgeflacht und in Zugrichtung gestreckt aus, wohingegen sie bei Ukadgaonker

[9] Zur Umrechnung wird Gleichung 3.19 verwendet

eher ründlich sind. Außerdem verhalten sich die Dehnungsminima um den Bohrungsrand unter den Winkeln $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ anders, indem sie bei Ukadgaonker lediglich in der Nähe des Bohrungsrandes und in runder Form auftreten, bei Soutis jedoch stark gestreckt in Zugrichtung verlaufen. Ein Vergleich aller Methoden mit der DIC Aufnahme aus dem Versuch führt zu dem Schluss, dass die Methode von Soutis eine qualitativ sehr akkurate Beschreibung der Dehnungs- bzw. Spannungsverteilung des 0°-Laminates liefert, da sie vor allem die gestreckte Form der Dehnungsmaxima und -minima berücksichtigt. Ukadgaonker beschreibt die Spannungsverteilung ähnlich gut, weist jedoch durch die runden Formen der Extrembereiche und kleinen Dehnungsminima links und rechts von der Bohrung einige Unterschiede zur den experimentellen Ergebnissen auf. Im Gegensatz dazu führt Lekhnitskii zu Ergebnissen, die sich stark vom Versuch unterscheiden, sodass diese Methode weniger gut für die Beschreibung der Dehnngs- bzw. Spannungsverteilung geeignet ist.

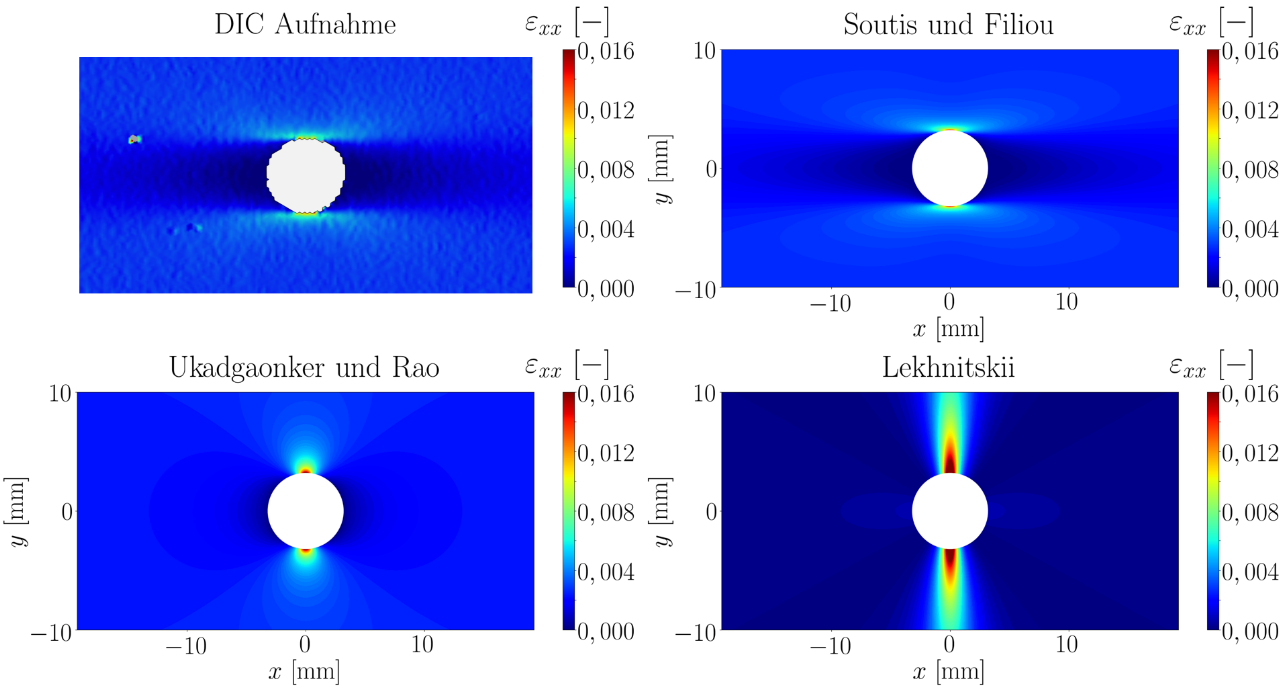


Abbildung 8.1: Dehnungsverteilung ε_{xx} in einem 0°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 306\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

Die Dehnungen senkrecht zur Zugrichtung werden in Abbildung 8.2 betrachtet. Wie bei der Dehnungsverteilung in Zugrichtung sticht die Verteilung von Lekhnitskii aus den übrigen hervor und sagt große Druckspannungen am Bohrungsrand unter den Winkeln $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ voraus, welche in keiner der anderen Methoden oder der DIC Aufnahme aus dem Versuch wiedergefunden werden können. Soutis und Ukadgaonker ähneln sich bis auf zwei Unterscheide. Zum einen sind im Fall von Ukadgaonker die Dehnungen am Bohrungsrand unter den Winkeln $\theta = 90°$ und $\theta = 270°$ annähernd Null, was bei Soutis nicht erkennbar ist. Zum Anderen weist

Soutis unter dem Winkel $\theta = 45°$ und in dazu in 90°-Schritten gedrehten Bereichen zusätzliche radial nach außen laufende Dehnungsminima auf, wie sie auch in der DIC-Aufnahme zu sehen sind und bereits in Abschnitt 6 bei der Betrachtung der Spannungsverteilung entlang eines Querschnittes mit größerem Durchmesser als dem der Bohrung erwähnt wurden (vgl. Abbildung 6.2). Generell fällt die Dehnungsverteilung im Versuch auf der gesamten Fläche betragsmäßig leicht kleiner aus, als in den Vorhersagen der analytischen Methoden, befindet sich jedoch in der gleichen Größenordnung. Da an allen Stellen ungefähr die gleichen Differenzen vorliegen, kann ein systematischer Fehler nicht ausgeschlossen werden, dessen Ursprung jedoch unbekannt ist. Die qualitative Verteilung stimmt jedoch zu einem hohen Grad mit der von Soutis überein.

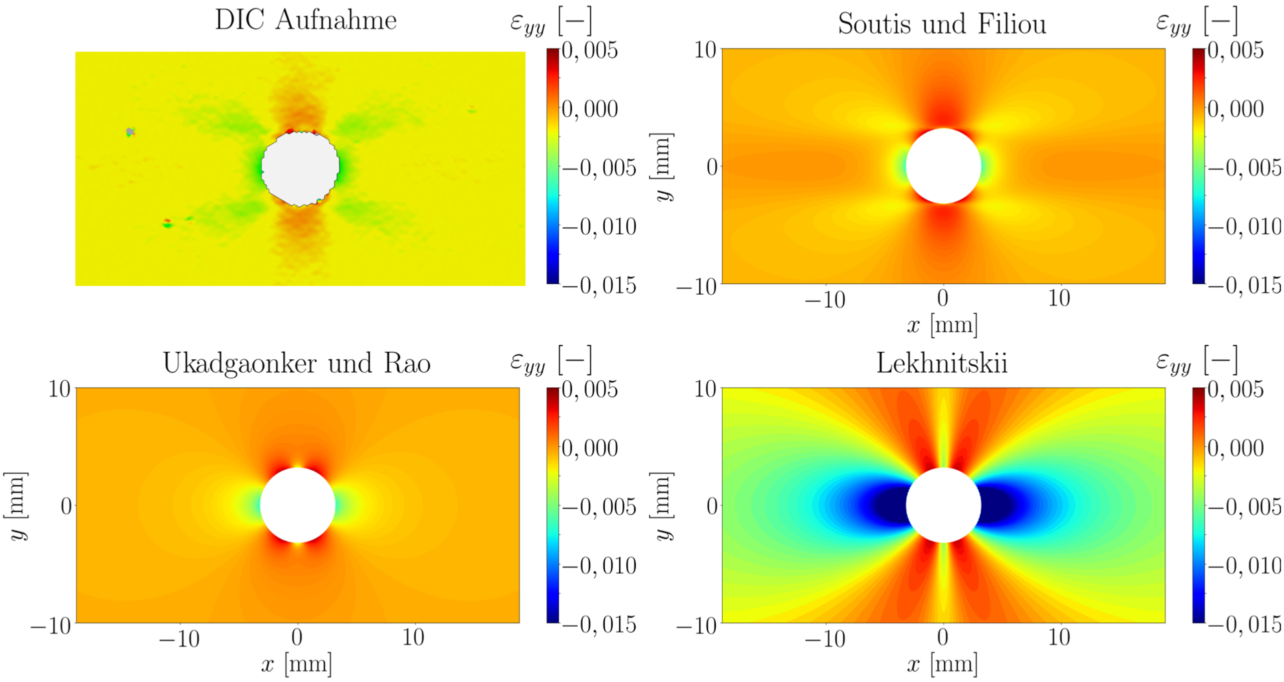


Abbildung 8.2: Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem 0°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 223\,\text{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

Die Betrachtung der Schubspannungen erfolgt in Abbildung 8.3. Wie zuvor bei den Normalspannungen zeigt Lekhnitskii eine sich stark von den anderen Methoden unterscheidende Dehnungsverteilung. Ober- und unterhalb der Bohrung befinden sich jeweils ein radial nach außen abflachendes Dehnungsmaximum und -minimum (Punktsymmetrie). Zwar weisen auch die übrigen Dehnungsverteilungen Maxima bzw. Minima an den gleichen Stellen auf, jedoch beschränken sich diese auf die nähere Umgebung des Bohrungsrandes, sodass der Rand annähernd durch gleichbleibende Dehnungen nahe Null beschrieben wird. Eine Besonderheit von Lekhnitskii sind die zusätzlich am linken und rechten Rand auftretenden Dehnungsmaxima und -minima, welche jedoch in keiner der anderen Methoden oder der DIC Aufnahme wiederzufinden sind. In der Darstellung von Ukadgaonker nehmen die extremen Dehnungsbereiche die

Form von Halbkreisen an, während Soutis wie zuvor eine eher abgeflachte und in Zugrichtung gestreckte Darstellung aufweist. Zusätzlich sind bei Soutis deutliche Ausläufe der Dehnungsmaxima bzw. -minima nach links und rechts zu finden, wie sie auch in der DIC Aufnahme erkennbar sind. Aus einem Vergleich zwischen den analytischen Methoden und der DIC Aufnahme wird ersichtlich, dass es quantitative Unterschiede zwischen den theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Ergebnissen gibt. So weisen zwar beide Modelle am Rand Dehnungen nahe Null auf, allerdings fallen die Dehnungen in den analytischen Methoden ca. doppelt so groß aus, wie im Experiment.

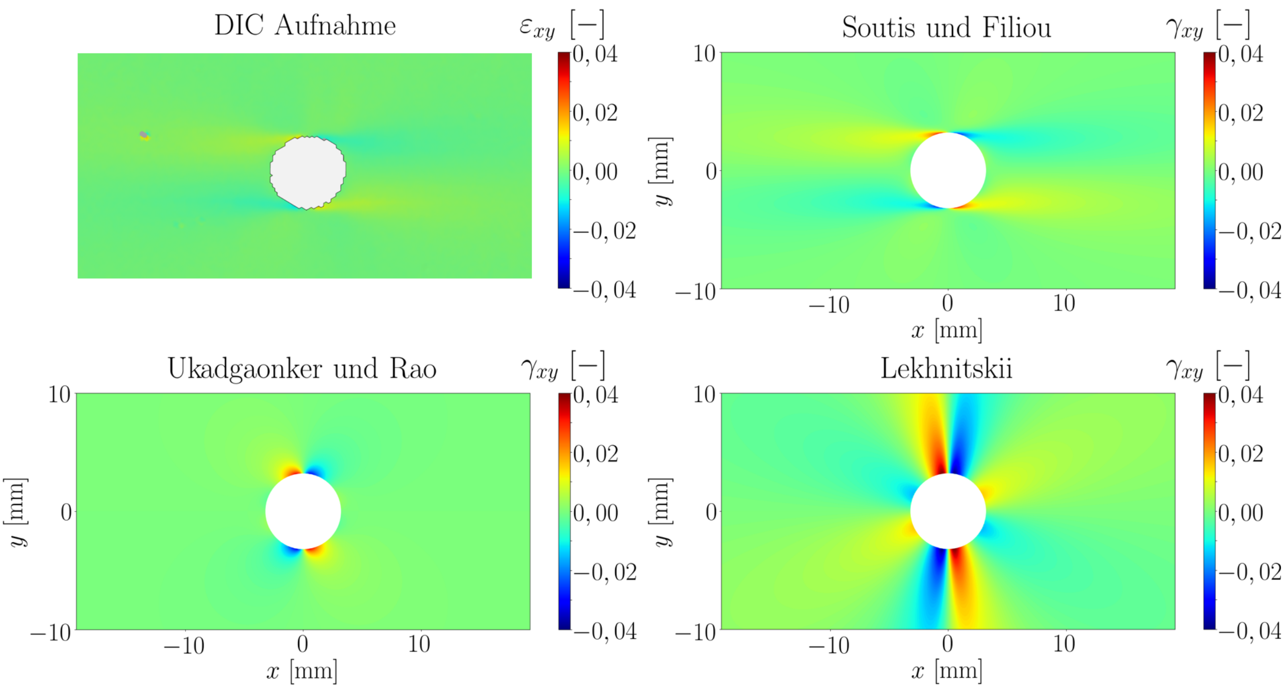


Abbildung 8.3: Dehnungsverteilung ε_{xy} in einem 0°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den Dehnungen γ_{xy} der analytischen Methoden; $p = 223\,\text{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

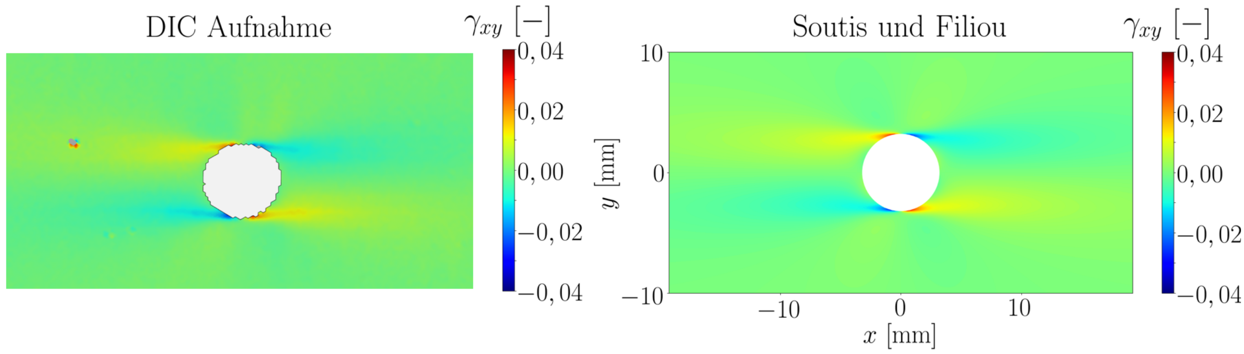


Abbildung 8.4: Gegenüberstellung der Dehnungsverteilungen γ_{xy} in einem 0°-Laminat von Soutis aus Abbildung 8.3 und der Verteilung aus dem Versuch

Der Grund hierfür ist, dass die in GOM ausgewerteten Dehnungen als ε und nicht als γ bestimmt werden und deshalb der Faktor 2 zwischen den Ergebnissen liegt (vgl. Gleichung 3.6c). Um die Dehnungsverteilungen qualitativ vergleichen zu können, stellt Abbildung 8.4 die DIC Aufnahme mit Dehnungen γ_{xy} statt ε_{xy} dar. Die sich ergebende Verteilung zeigt hohe Übereinstimmung mit der daneben gezeigten Verteilung von Soutis. Ukadgaonker stellt eine befriedigende Beschreibung um den Bohrungsrand dar, ist allerdings nicht für die gesamte Fläche geeignet.

Die Spannungsverteilungen im engsten Querschnitt eines 0°-Lamiantes wurde bereits in Abschnitt 5 vorgestellt. Aus den experimentellen Daten können einige Datenpunkte für diesen Querschnitt abgelesen werden, sodass die analytischen Ergebnisse mit den Datenpunkten verglichen werden können (vgl. Abbildung 8.5). Die experimentellen Daten werden aus der Auswertungssoftware gewonnen, indem ein Schnitt unter 90° durch das Laminat gelegt wird (vgl. Abbildung A.9), für den dann Diagramme und Tabellen erstellt werden, die die entsprechenden Dehnungen über den Ort auftragen (vgl. Abbildung A.3 und A.4) bzw. entsprechende Datenpaare enthalten. Da die Schnitte den engsten Querschnitt auf beiden Seiten enthalten[10], wird der Mittelwert der Dehnungen für die Berechnung der Spannungen benutzt (vgl. Tabelle 8.1). Zusätzlich wird die Standardabweichung (SAW) aus den Messwerten gebildet und als Intervall der Fehlerindikatoren verwendet. Weitere Fehlerquellen, wie zum Beispiel die Berechnungsungenauigkeit oder die Abweichung des Schnittwinkels von 90° werden nicht einbezogen, zeigen sich aber in der Streuung der Datenpunkte. Die Betrachtung beschränkt sich auf die Spannung σ_{xx}, da diese im engsten Querschnitt am relevantesten für den Zugversuch ist.

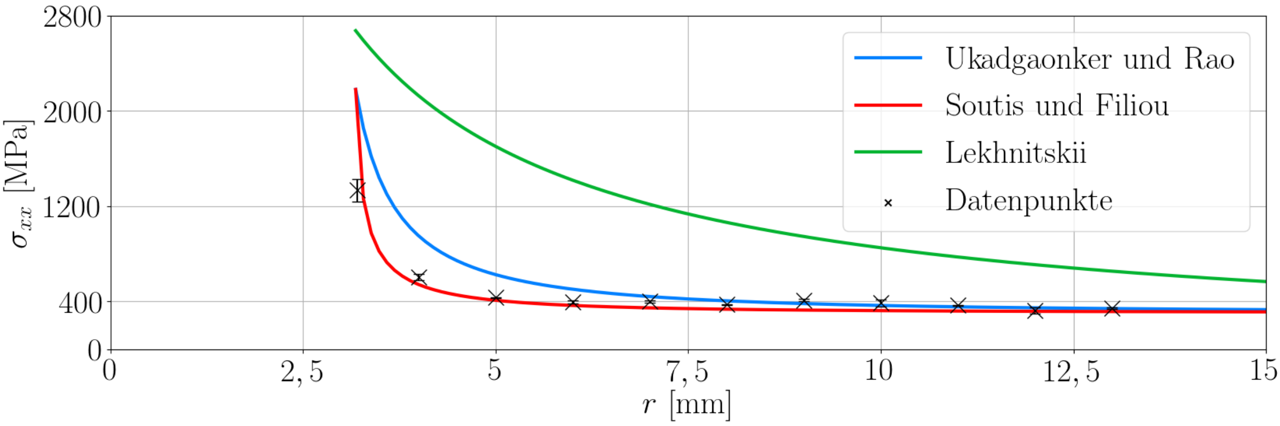


Abbildung 8.5: Vergleich der analytischen Methoden mit Datenpunkten aus den Versuchen im Querschnitt eines 0°-Laminates unter $\theta = 90°$ mit $p = 306\,\text{MPa}$ und der Geometrie aus Tabelle 7.2

Aus Abbildung 8.5 und den relativen Fehlern aus Tabelle 8.1 ist zu erkennen, dass die Datenpunkte im Intervall von $r = 4\,\text{mm}$ bis $r = 8\,\text{mm}$, also in Bohrungsnähe, gut von dem

[10] In Bezug auf Abbildung A.9 und die Diagramme in Abbildungen A.3 und A.4 werden die Seiten im Weiteren mit l (links) bzw. r (rechts) indiziert

Kurvenverlauf von Soutis beschrieben werden (maximaler relativer Fehler: $13,5\%$; im Vergleich Ukadgaonker: $57,5\%$). Mit größerem Abstand vom Bohrungsrand sinkt jedoch die Genauigkeit von Soutis, wohingegen die von Ukadgaonker steigt und mit relativen Fehlern von 0% bis $7,5\%$ eine gute Abbildung der Versuche darstellt (Soutis zwischen $1,9\%$ und $20,4\%$). In unmittelbarer Nähe vom Bohrungsrand ($r = 3,2\,\mathrm{mm}$) weisen beide Methoden mit $52,3\%$ bzw. $59,6\%$ große Fehler auf. Der Grund dafür ist, dass die experimentellen Werte an dieser Stelle sehr empfindlich auf Änderungen des Abstandes reagieren, sodass es zu starken Wertschwankungen kommt (vgl. Abbildungen A.3 und A.4). So zeigt eine Betrachtung des Punktes in Abbildung 8.5, dass die Kurve von Soutis dennoch eine gute Beschreibung der experimentellen Ergebnisse darstellt. Die Kurve von Lekhnitskii verhält sich, wie in Abschnitt 5 beschrieben, anders als die Übrigen und weist offensichtlich große Abstände zu den Datenpunkten auf, sodass die Betrachtung der relativen Fehler in diesem Fall obsolet ist. Obwohl Ukadgaonker mit größerem Abstand vom Bohrungsrand bessere Übereinstimmungen mit den Versuchsdaten aufweist, repräsentiert die Kurve von Soutis eine bessere Beschreibung der Spannungsverteilung. Ein Grund ist, dass der maximale relative Fehler mit $20,4\%$ deutlich unter dem von Ukadgaonker mit $57,5\%$ liegt ($r = 3,2\,\mathrm{mm}$ ausgenommen). Des Weiteren bildet Soutis die Umgebung der Bohrung besser als die übrigen Methoden ab, welche für die Vorauslegung von Strukturen besonders wichtig ist.

Tabelle 8.1: Dehnungen verschiedener Punkte entlang eines Querschnittes unter $\theta = 90°$ in einem 0°-Laminat mit $p = 306\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung; Vergleich mit den aus Tabellen abgelesenen Werten für die Kurven von Soutis und Ukadgaonker

	r [mm]										
	3,2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_{xx,l}$ [10^{-2}]	1,02	0,50	0,34	0,32	0,31	0,30	0,32	0,33	0,29	0,24	0,27
$\varepsilon_{xx,r}$ [10^{-2}]	1,13	0,47	0,34	0,30	0,32	0,29	0,33	0,29	0,29	0,28	0,28
$\varepsilon_{yy,l}$ [10^{-2}]	-1,83	0,10	0,20	0,13	0,10	0,04	0,04	0,04	-0,05	-0,01	-0,03
$\varepsilon_{yy,r}$ [10^{-2}]	-0,02	0,22	0,18	0,13	0,11	0,06	0,02	-0,06	0,01	-0,02	-0,06
$\sigma_{xx,l}$ [MPa]	1239	633	435	411	393	379	403	417	365	298	335
$\sigma_{xx,r}$ [MPa]	1427	581	432	382	408	370	420	359	370	350	348
$\varnothing\ \sigma_{xx}$ [MPa]	1333	607	433	397	400	375	412	388	367	324	341
SAW [MPa]	94,0	25,7	1,5	14,7	7,5	4,3	8,4	29,6	2,5	26,1	6,5
$\sigma_{xx,\mathrm{SF}}$ [MPa]	2030	545	410	367	346	335	328	323	320	318	316
$\Delta_{\mathrm{rel.}}$ [%]	52,3	10,1	5,3	7,6	13,5	10,7	20,4	16,8	12,8	1,9	7,3
$\sigma_{xx,\mathrm{UR}}$ [MPa]	2127	956	625	502	440	404	381	368	356	347	341
$\Delta_{\mathrm{rel.}}$ [%]	59,6	57,5	44,3	26,5	10,0	7,7	7,5	5,2	3,0	7,1	0,0

Neben den Querschnitten sollen ebenfalls die Spannungsverteilungen σ_{xx} und σ_{yy} in Kreisen um den Bohrungsmittelpunkt mit Hilfe von experimentellen Daten validiert werden. Da die Software keine eingebaute Funktion hat, um Dehnungen in einem Kreis auszugeben, werden benutzerdefinierte Werte in 30°-Schritten unter Verwendung von sogenannten Abtastfähnchen erzeugt, wie sie in Abbildung A.10 für das 0°-Laminat dargestellt sind. Durch die Verwendung der Abtastfähnchen ist die Genauigkeit der experimentellen Werte eingeschränkt, sodass es zu einer großen Streuung der Werte kommt (vgl. Tabelle 8.2). Da außerdem nur eine Probe untersucht wurde, können kein Mittelwert und keine Standardabweichung gebildet werden. Aus diesen beiden Gründen wird auf eine Darstellung der Werte mit Fehlerindikatoren verzichtet und ausschließlich ein qualitativer Vergleich mit den analytischen Methoden vorgenommen.

In Abbildung 8.6 werden die theoretischen Spannungsverteilungen σ_{xx} entlang eines Kreises mit größerem Durchmesser als dem der Bohrung mit den experimentellen Daten verglichen. Die Streuung der Datenpunkte wird hier am Beispiel von $\theta = 90°$ bzw. $\theta = 270°$ deutlich, da diese beiden Werte wegen der Symmetrie gleich groß sein müssten, jedoch eine deutliche Differenz von ca. 250 MPa aufweisen.

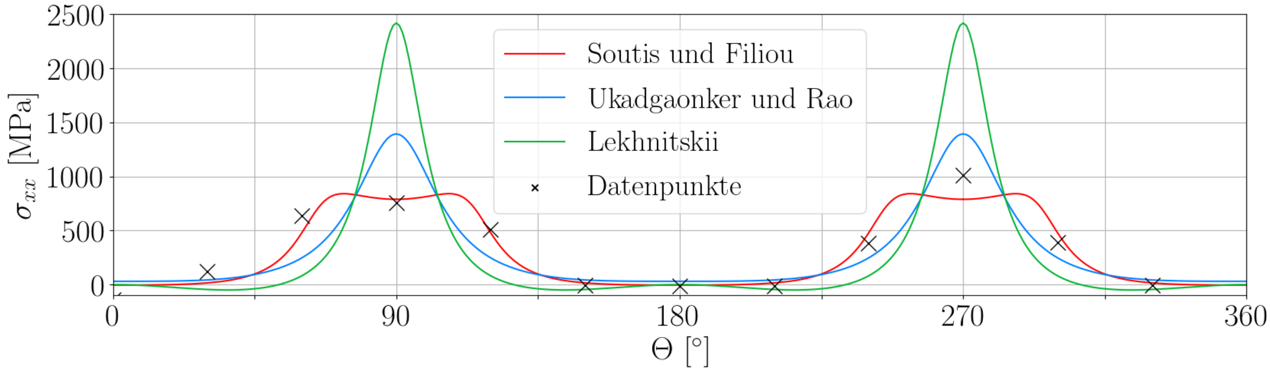


Abbildung 8.6: Spannungsverteilung σ_{xx} entlang eines Kreises mit $D = 7,04$ mm um die Bohrung ($d = 6,37$ mm) in einem 0°-Laminat mit $w = 32,04$ mm und $p = 306$ MPa und Datenpunkte aus den Versuchen

Auf den ersten Blick fällt auf, dass die Spannungsspitzen von Lekhnitskii bei den eben genannten Winkeln deutlich über den experimentellen Werten liegen. Im Gegensatz dazu liegt die Kurve von Soutis auf der linken Seite sehr nah am Datenpunkt. Auf der rechten Seite wird der Punkt weiterhin annähernd von Soutis beschrieben, weist aber einen größeren Abstand zur Kurve nach unten auf. Im ungefähr gleichen Abstand nach oben verläuft die Kurve von Ukadgaonker. Zwischen den Bereichen maximaler Dehnungen werden die Datenpunkte durch alle Methoden gut angenähert. Eine Besonderheit von Soutis ist, dass die Kurve keine Maxima bei $\theta = 90°$ und $\theta = 270°$ wie die anderen Methoden aufweist, sondern ein Minimum und eher ein Plateau in deren Umgebung bildet, welches um die genannten Winkel symmetrisch verteilte Maxima aufweist. Durch dieses Plateau steigen die Spannungen früher als die Kurvenverläufe der anderen Methoden an, was in großer Übereinstimmung mit den experimentellen Daten steht. Es lässt sich festhalten, dass Lekhnitskii nur eine teilweise akkurate Darstellung der Spannungsverläufe bietet, während Ukadgaonker sich besser an die Punkte anpasst, jedoch um $\theta = 90°$ und $\theta = 270°$ ebenfalls größere Abweichungen vorweist. Eine gute Beschreibung entlang des gesamten Kreises stellt die Spannungsverteilung von Soutis dar.

Neben den eben betrachteten Spannungen in Zugrichtung werden ebenfalls die Spannungen senkrecht dazu betrachtet, wie in Abbildung 8.7 gezeigt wird. Die Kurve von Lekhnitskii weist erneut große Unterschiede zu den Datenpunkten auf, wobei sie nun bei $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ auftreten. Bei diesen Winkeln verlaufen die Kurven von Soutis und Ukadgaonker wie für das gesamte Winkelintervall sehr ähnlich und stellen beide eine gute Annäherung and die experimentellen Werte dar. Unterschiede zwischen den letztgenannten Methoden befinden sich bei $\theta = 90°$ und $\theta = 270°$. So weist Soutis bei diesen Winkeln ein globales Maximum vor, während Ukadgaonker ein lokales Minimum erfährt. Zwischen den beiden Extrempunkten liegen die Datenpunkte, sodass trotzdem beide Kurven zu guten Übereinstimmungen führen. In diesem Bereich verläuft auch die Kurve von Lekhnitskii nahe den Datenpunkten, sodass sich diese Methode teilweise zur Beschreibung der Spannungsverteilung eignet.

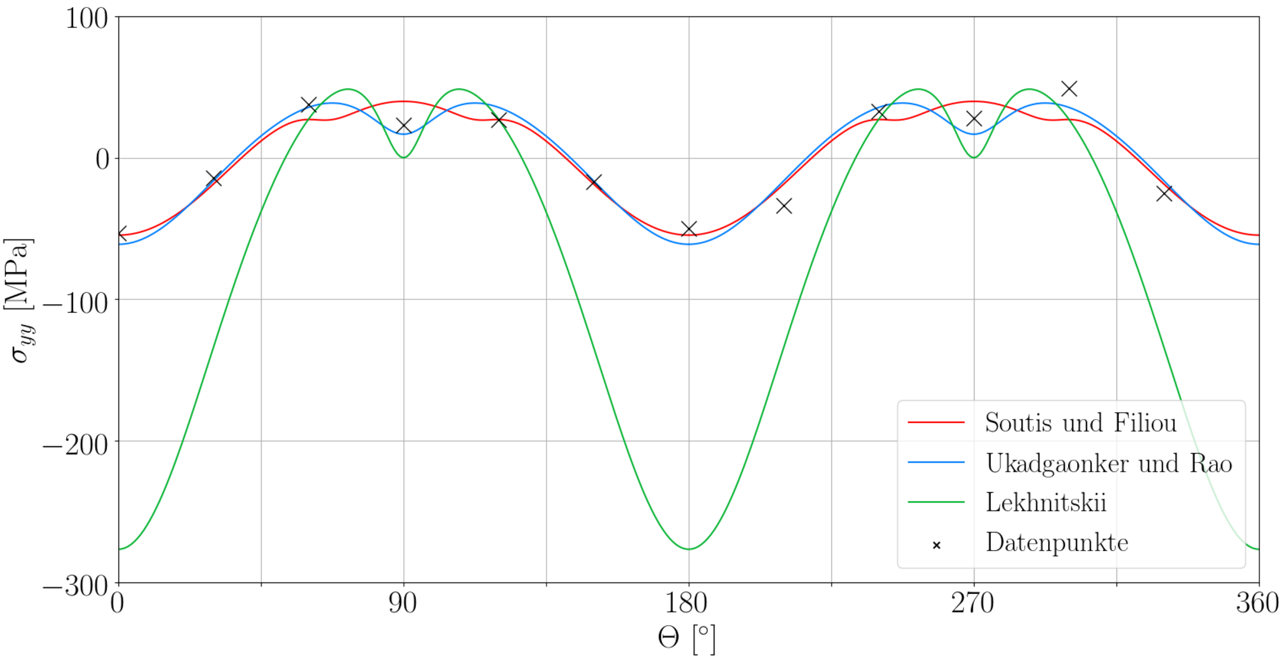


Abbildung 8.7: Spannungsverteilung σ_{yy} entlang eines Kreises mit $D = 7{,}04\,\text{mm}$ um die Bohrung ($d = 6{,}37\,\text{mm}$) in einem 0°-Laminat mit $w = 32{,}04\,\text{mm}$ und $p = 306\,\text{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen

Tabelle 8.2: Dehnungen auf einem Kreis ($D = 7{,}04\,\text{mm}$) um die Bohrung ($d = 6{,}37\,\text{mm}$) in einem 0°-Laminat mit $w = 32{,}04\,\text{mm}$ und $p = 306\,\text{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung

	θ [°]											
	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
ε_{xx} [10^{-2}]	-0,1	0,1	0,5	0,6	0,4	0,0	0,0	0,0	0,3	0,8	0,3	0,0
ε_{yy} [10^{-2}]	-0,6	-0,2	0,3	0,1	0,2	-0,2	-0,6	-0,4	0,3	0,1	0,5	-0,3
σ_{xx} [MPa]	-141	121	639	760	510	-5	-15	-10	386	1012	391	-7
σ_{yy} [MPa]	-53	-14	38	23	27	-17	-50	-34	33	28	49	-25

8.2 Spannungsverteilung im 90°−Laminat

In diesem Abschnitt werden die zweidimensionalen Dehnungsverteilungen sowie die Spannungsverteilungen entlang des engsten Querschnittes und eines Kreises um den Bohrungsmittelpunkt in einem 90°-Laminat betrachtet. Abbildung 8.8 zeigt die Dehnungsverteilungen in Zugrichtung aus den analytischen Methoden und die DIC Aufnahme aus dem Versuch. Auffällig ist, dass das Farbschema von Lekhnitskii, wie bereits im vorherigen Abschnitt, allgemein dunkler ausfällt als das der übrigen Bilder und links und rechts von der Bohrung Dehnungen nahe Null vorhersagt, während die anderen Bilder vor allem zum Rand hin konstante Dehnungen von ca. 0,004 aufweisen.

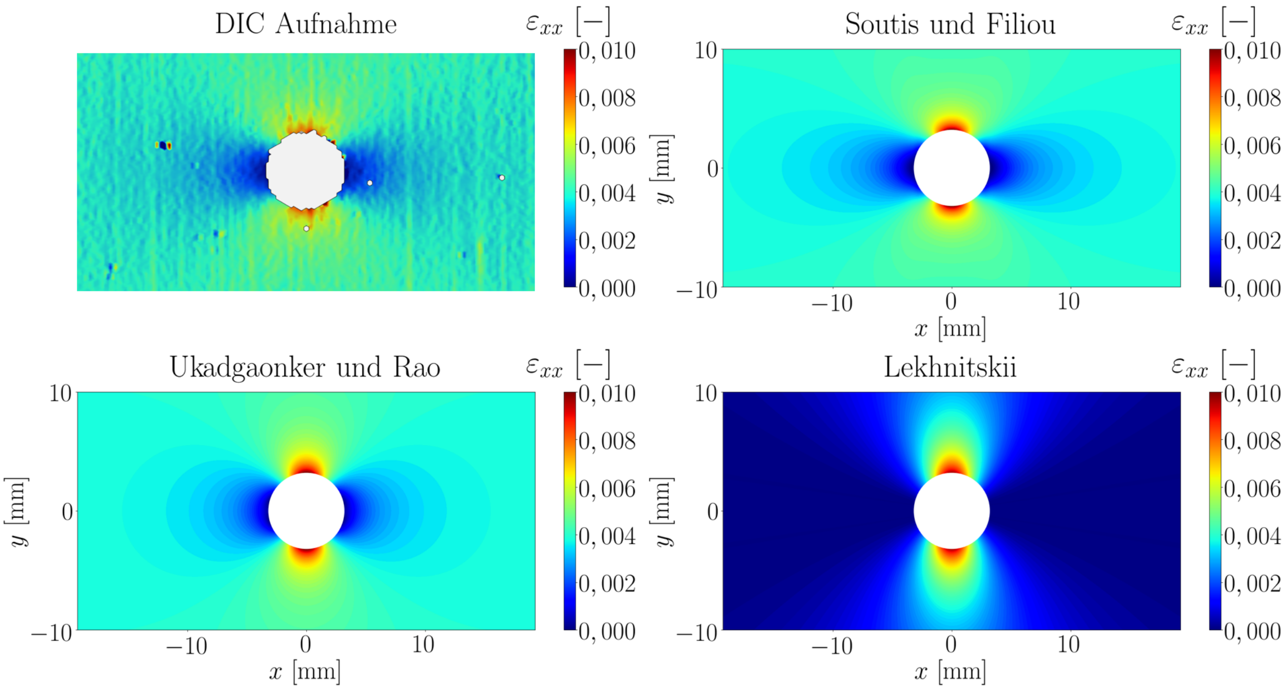


Abbildung 8.8: Dehnungsverteilung ε_{xx} in einem 90°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 33\,\text{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt verhalten sich die Dehnungsüberhöhungen von Lekhnitskii ober- und unterhalb der Bohrung jedoch ähnlich im Vergleich mit dem Experiment und den anderen Methoden. Der Grund dafür ist, dass die Spannungsüberhöhung am Bohrungsrand betragsmäßig klein ausfällt, sodass es zu keinem rapiden Abfall der Methoden von Soutis und Ukadgaonker am Bohrungsrand kommt und diese sich eher wie die Funktion $f(x) = {}^1\!/\!_x$ verhalten, wie es auch Lekhnitskii tut. Aufgrund der großen Abweichungen links und rechts von der Bohrung im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen eignet sich die Methode jedoch nicht zur Berechnung der Dehnungs- bzw. Spannungsverteilung. Die Dehnungsverteilungen von Soutis und Ukadgaonker sind sich sehr ähnlich mit dem einzigen Unterschied, dass die Verteilung von Soutis mehr in Zugrichtung gestreckt ausfällt. Nichtsdestotrotz liefern beide Methoden im Vergleich mit der DIC Aufnahme gute Übereinstimmungen.

Die Dehnungsverteilungen senkrecht zur Zugrichtung aufgrund von Querkontraktion sind in Abbildung 8.9 und 8.10 dargestellt. In der ersten Abbildung werden die Methoden zusätzlich mit der DIC Aufnahme verglichen, wobei es in diesem Fall aufgrund vom großen Elastizitätsmodul senkrecht zur Zugrichtung zu sehr niedrigen Dehnungen kommt, sodass die Genauigkeit der Auswertungssoftware nicht mehr ausreicht, um die quantitativen Ergebnisse akkurat darzustellen. Als Resultat kommt es zu starken Wertschwankungen in der DIC Aufnahme und damit verbunden zu einer überzogenen Farbskala, sodass die qualitativen Verteilungen der analytischen Methoden nur schwer zu erkennen sind.

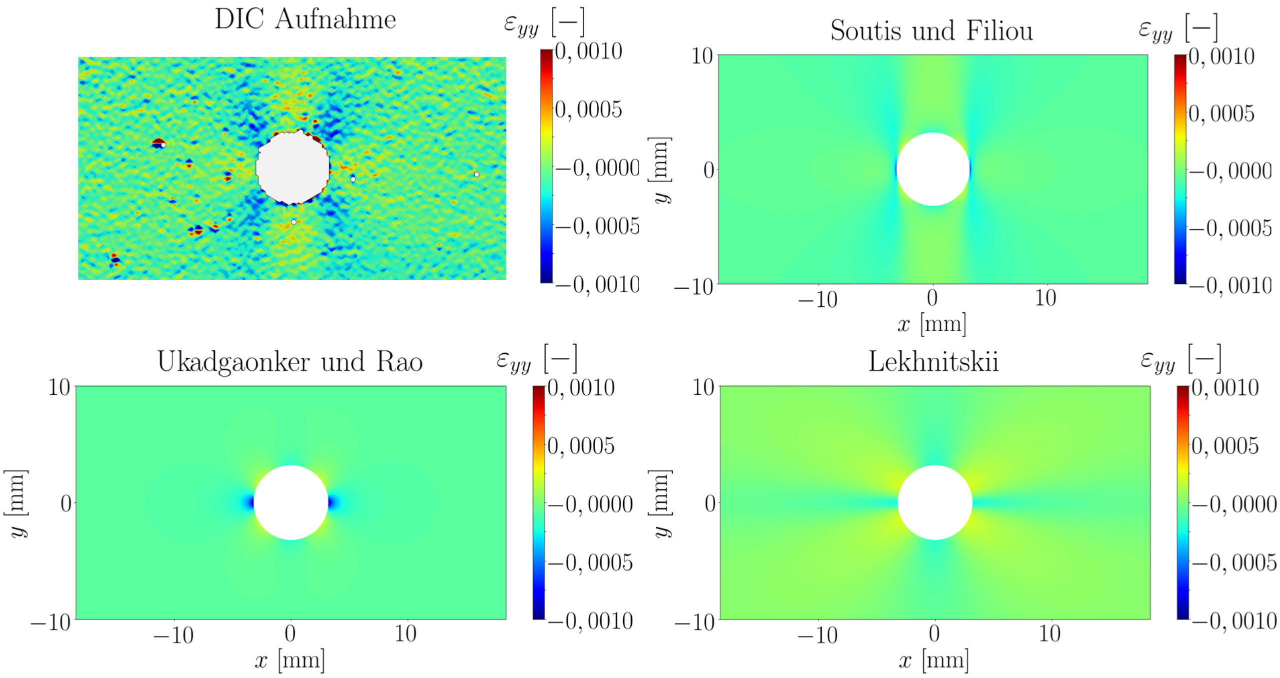


Abbildung 8.9: Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem 90°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

Um dennoch qualitative Vergleiche zwischen den analytischen Methoden zu ziehen, betrachtet Abbildung 8.10 die Dehnungsverteilungen für eine genauere Farbunterteilung. Aus der DIC Aufnahme geht hervor, dass die kleinsten Dehnungen in Winkelintervallen zwischen $\theta \approx 30°$ und $\theta \approx 60°$, um die Bohrung verteilt vorliegen, die größten Dehnungen hingegen In Intervallen zwischen $\theta \approx 60°$ und $\theta \approx 120°$ bzw. in 90°-Schritten dazu. Diese Formen lassen sich lediglich bei der Dehnungsverteilung von Soutis wiederfinden. Ukadgaonker und Lekhnitskii vertauschen die Dehnungsbereiche. Folglich stellen die letztgenannten Methoden eine qualitativ signifikant unterschiedliche Dehnungsverteilung im Vergleich mit der DIC Aufnahme dar und eigenen sich nicht zur Vorhersage der Spannungsverteilung. Die Methode von Soutis beschreibt sowohl die

Bereiche um die Bohrung als auch in einiger Entfernung mit guter Übereinstimmung und bildet somit eine gute Repräsentation der Versuche.

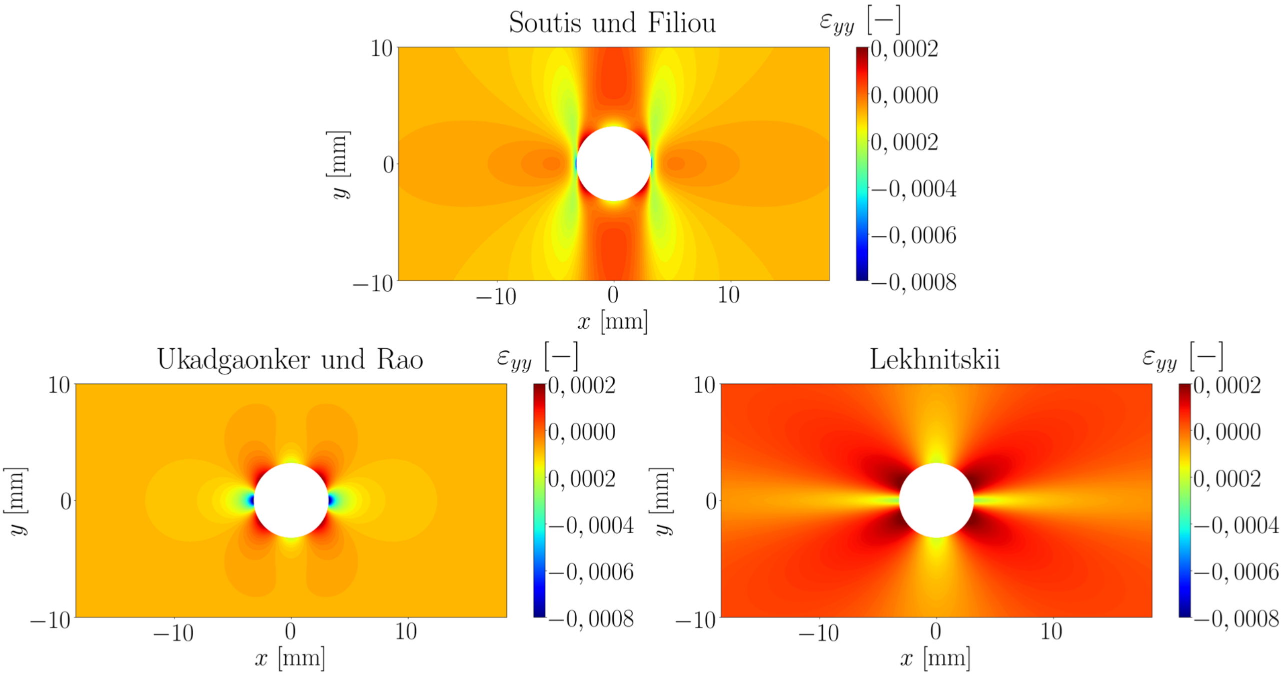


Abbildung 8.10: Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem 90°-Laminat den analytischen Methoden; p = 35 MPa und Geometrie aus Tabelle 7.2

Die Dehnungsverteilungen γ_{xy} der analytischen Methoden werden in Abbildung 8.11 mit der Dehnungsverteilung ε_{xy} aus dem Versuch verglichen. Das auffällig unterschiedliche Farbschema der DIC Aufnahme wird durch die unterschiedliche Skala begründet, die nur bis $0,003$ statt bis $0,006$ geht. Nach der Umrechnung der Dehnungsverteilung der DIC Aufnahme von ε_{xy} in γ_{xy} und Anpassung der Skala zeigt das experimentelle Ergebnis eine große qualitative Übereinstimmung mit der Dehnungsverteilung von Soutis (vgl. Abbildung 8.12). So werden sowohl die in Zugrichtung gestreckten Dehnungsmaxima und -minima links und rechts als auch die Ausläufe ober- und unterhalb der Bohrung korrekt von der Theorie dargestellt. Im Vergleich dazu bildet Ukadgaonker die Maxima und Minima um den Bohrungsrand in ründlicher, aber dennoch annähernd korrekter, Form ab. Die Methode vernachlässigt jedoch die Dehnungsausläufe ober- und unterhalb der Bohrung, sodass die Beschreibung der Dehnungsverteilung in einiger Entfernung von der Bohrung weniger gut ausfällt. Die Verteilung von Lekhnitskii ähnelt der von Ukadgaonker, jedoch erstrecken sich die Dehnungsmaxima und -minima deutlich weiter auf radialen Pfaden nach außen. Ein Vergleich mit der DIC Aufnahme lässt darauf schließen, dass die Methode von Lekhnitskii ebenfalls nur die nähere Umgebung des Bohrungsrandes akkurat beschreibt und für die Bereiche in einiger Entfernung nicht geeignet ist.

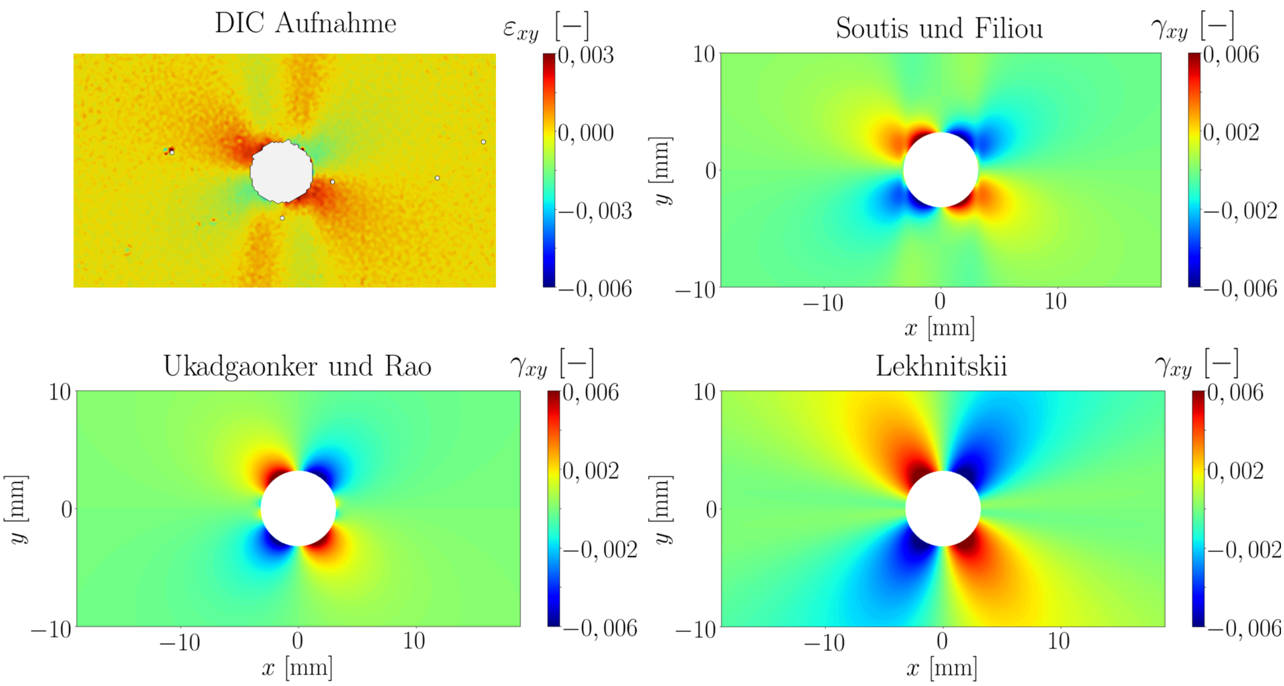


Abbildung 8.11: Dehnungsverteilung ε_{xy} in einem 90°-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den Dehnungen γ_{xy} der analytischen Methoden; $p = 35\,\text{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

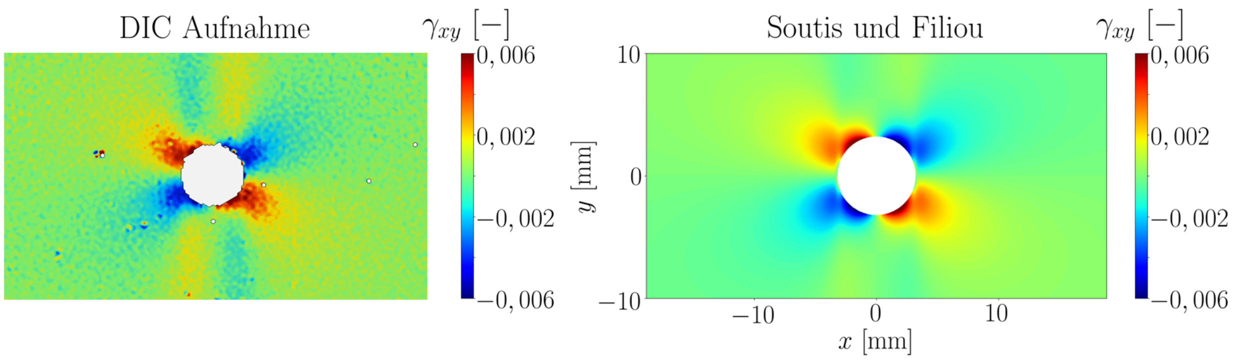


Abbildung 8.12: Gegenüberstellung der Dehnungsverteilungen γ_{xy} in einem 90°-Laminat von Soutis aus Abbildung 8.11 und der Verteilung aus dem Versuch

Analog zur Vorgehensweise aus Abschnitt 8.1, um Spannungsverläufe im Querschnitt miteinander vergleichen zu können, werden auch für das 90°-Laminat Datenpunkte bestimmt (vgl. Abbildungen A.5 und A.6) und zusammen mit den Kurvenverläufen in ein Diagramm aufgetragen (vgl. Abbildung 8.13). Der verwendete Querschnitt und der Kreis um den Bohrungsmittelpunkt sind in Abbildungen A.11 bzw. A.12 zu finden.

Alle Kurvenverläufe unterscheiden sich bis zu einem Abstand $r \approx 7\,\text{mm}$ nur wenig voneinander. Für größere Abstände zum Bohrungsmittelpunkt fällt die Kurve von Lekhnitskii kontinuierlich weiter, während sich Soutis und Ukadgaonker asymptotisch der äußeren Last nähern. Da sich die Kurve von Lekhnitskii für größere Abstände zur Bohrung weit von den Datenpunkten entfernt und eine ungenaue Abbildung der Versuchsdaten darstellt, wird diese Methode nicht in die folgende Betrachtung der relativen Fehler einbezogen.

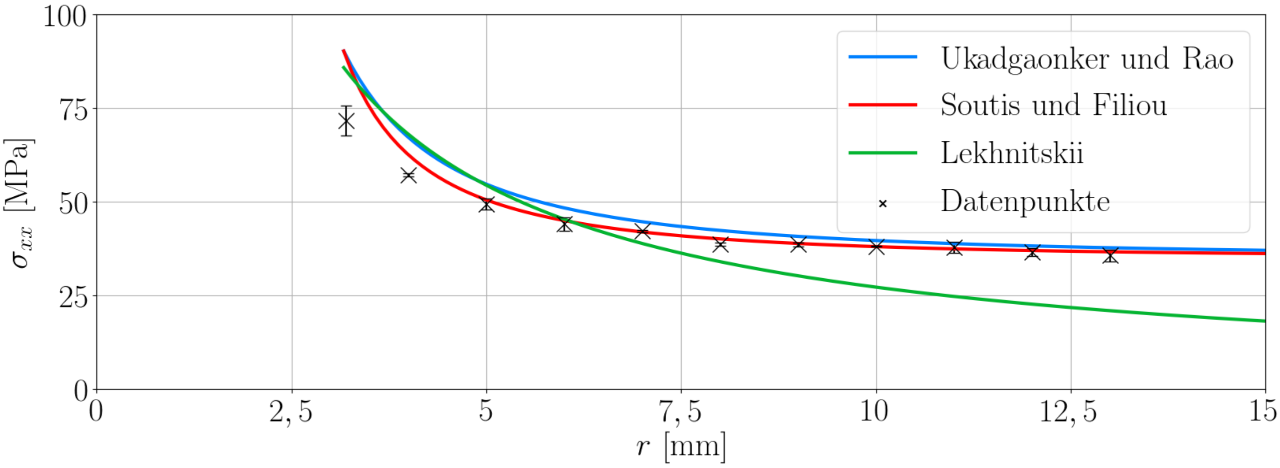


Abbildung 8.13: Vergleich der analytischen Methoden mit Datenpunkten aus den Versuchen im Querschnitt eines 90°-Laminates unter $\theta = 90°$ mit $p = 35\,\text{MPa}$ und der Geometrie aus Tabelle 7.2

Tabelle 8.3: Dehnungen verschiedener Punkte entlang eines Querschnittes unter $\theta = 90°$ in einem 90°-Laminat mit $p = 35\,\text{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung; Vergleich mit den aus Tabellen abgelesenen Werten für die Kurven von Soutis und Ukadgaonker

	r [mm]										
	3,2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_{xx,l}$ $[10^{-2}]$	0,89	0,68	0,60	0,50	0,50	0,47	0,45	0,45	0,47	0,42	0,45
$\varepsilon_{xx,r}$ $[10^{-2}]$	0,92	0,69	0,57	0,54	0,51	0,46	0,47	0,46	0,44	0,44	0,43
$\varepsilon_{yy,l}$ $[10^{-3}]$	0,45	-0,02	0,31	0,28	-0,15	-0,07	0,16	0,18	0,03	0,05	-0,18
$\varepsilon_{yy,r}$ $[10^{-3}]$	-3,74	0,00	0,00	0,17	-0,15	-0,12	-0,20	-0,07	-0,20	0,31	-0,87
$\sigma_{xx,l}$ [MPa]	76	57	51	42	42	39	38	38	39	36	37
$\sigma_{xx,r}$ [MPa]	68	58	48	46	43	38	39	38	36	38	34
$\varnothing\ \sigma_{xx}$ [MPa]	72	57	49	44	42	39	39	38	38	37	36
SAW [MPa]	4,0	0,4	1,4	1,8	0,4	0,4	0,6	0,1	1,5	1,0	1,6
$\sigma_{xx,\mathrm{SF}}$ [MPa]	88	63	50	45	42	40	39	38	37	37	36
$\Delta_{\mathrm{rel.}}$ [%]	22,2	10,53	2,04	2,27	0,00	2,56	0,00	0,00	2,63	0,00	0,00
$\sigma_{xx,\mathrm{UR}}$ [MPa]	89	68	55	48	44	42	41	40	39	38	38
$\Delta_{\mathrm{rel.}}$ [%]	28,61	19,30	12,24	9,09	4,76	7,69	5,13	5,26	2,63	2,70	5,56

Die Kurven von Soutis und Ukadgaonker verlaufen sehr ähnlich und unterscheiden sich hauptsächlich in der Nähe des Bohrungsrandes. Mit Ausnahme von $r = 3,2\,\text{mm}$ ist die Methode von Soutis mit relativen Fehlern zwischen $0,0\%$ und $10,53\%$ deutlich genauer, als die von Ukadgaonker mit relativen Fehlern zwischen $2,63\%$ und $19,3\%$ (vgl. Tabelle 8.3). Die großen Abweichungen in unmittelbarer Nähe zum Bohrungsrand ($22,2\%$ bzw. $28,6\%$) lassen sich wie im vorangegangen Abschnitt durch die sensible Abhängigkeit der Spannung vom Abstand zur

Bohrung und der einhergehenden Berechnungsungenauigkeit erklären. Dennoch stellt die Methode von Soutis wie zuvor die genauste Beschreibung der Spannungsverteilung dar, gefolgt von der Methode von Ukadgaonker, die vor allem in einiger Entfernung von der Bohrung sehr genaue Ergebnisse liefert. Die Methode von Lekhnitskii stellt eine befriedigende Vorhersage in der Nähe der Bohrung dar, weicht allerdings in einiger Entfernung von der Bohrung stark von den Datenpunkten ab, sodass sie sich nicht zur Beschreibung der Spannungsverteilung eignet.

Die Spannungsverteilungen σ_{xx} entlang eines Kreises mit größerem Durchmesser als dem der Bohrung sind in Abbildung 8.14 dargestellt. Die Kurven verlaufen alle sehr ähnlich und weisen nur kleine Unterschiede auf. Bei $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ erfährt die Kurve von Soutis ein globales Minimum, während die anderen beiden Kurven nahezu gerade verlaufen, jedoch Anzeichen eines lokalen Maximums zeigen. Eine Besonderheit des 90°-Laminates ist, dass die von Lekhnitskii vorhergesagten Spannungen niedriger ausfallen als die von Ukadgaonker. Der Grund hierfür ist der Elastizitätsmodul des Laminates, welcher senkrecht zur Zugrichtung größer ist als in Zugrichtung (vgl. Abschnitt 5 Einfluss des Materials). Der Datenpunkt bei $\theta = 300°$ stellt eine besonders große Schwankung dar und müsste sich aufgrund der Achsensymmetrie eher wie die Datenpunkte bei $\theta = 60°$ und $120°$ verhalten. Insgesamt bilden alle Kurven über das komplette Winkelintervall gute Vorhersagen der Spannungsverteilung, wobei die Kurve Soutis meistens etwas näher an den Datenpunkten liegt und somit die beste Beschreibung liefert.

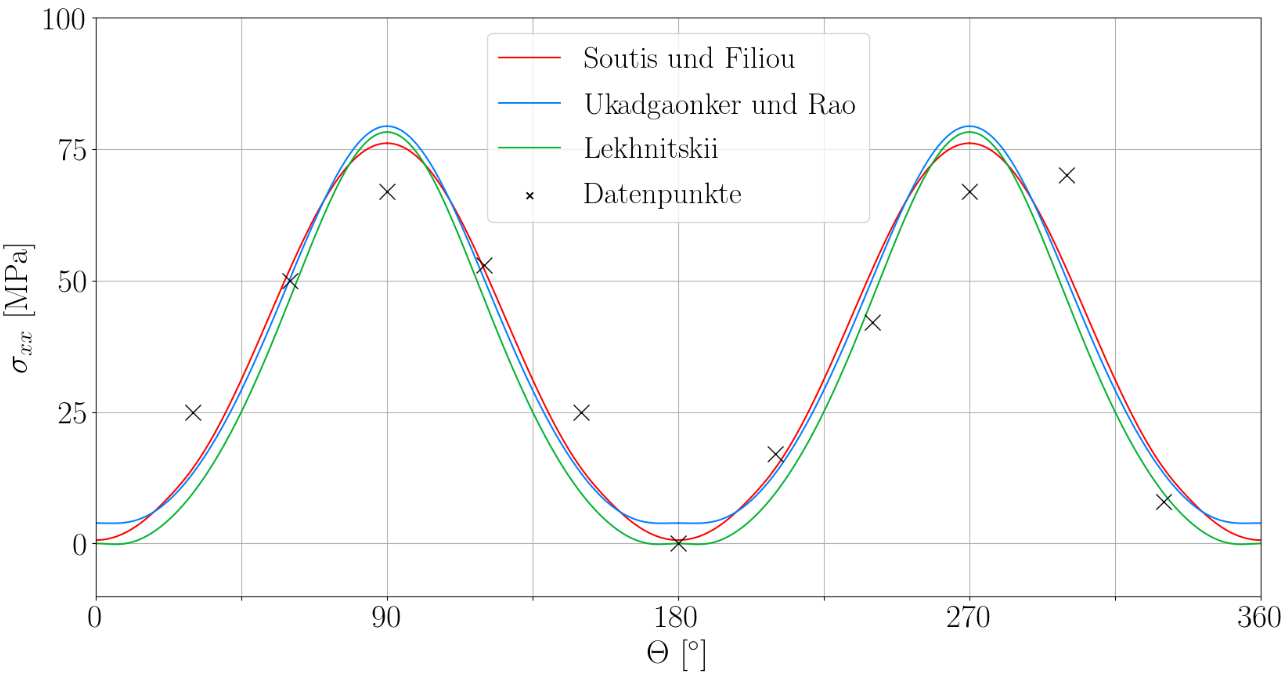


Abbildung 8.14: Spannungsverteilung σ_{xx} entlang eines Kreises mit $D = 6,95\,\text{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,34\,\text{mm}$) in einem 90°-Laminat mit $w = 32,03\,\text{mm}$ und $p = 35\,\text{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen

Im Vergleich zu den Spannungsverläufe σ_{xx} im 90°-Laminat weisen die Kurvenverläufe der Spannung σ_{yy} qualitative und quantitative Unterschiede untereinander auf (vgl. Abbildung 8.15). So unterscheidet sich Soutis beispielsweise dadurch von den anderen Methoden, dass keine Minima bei den Winkeln $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ vorhanden sind, sondern lokale Maxima. Stattdessen liegen zwei Minima symmetrisch um die genanten Winkel verteilt vor. Für die übrigen Winkel ähneln sich alle Kurven qualitativ, weisen jedoch Abstände zwischen einander auf.

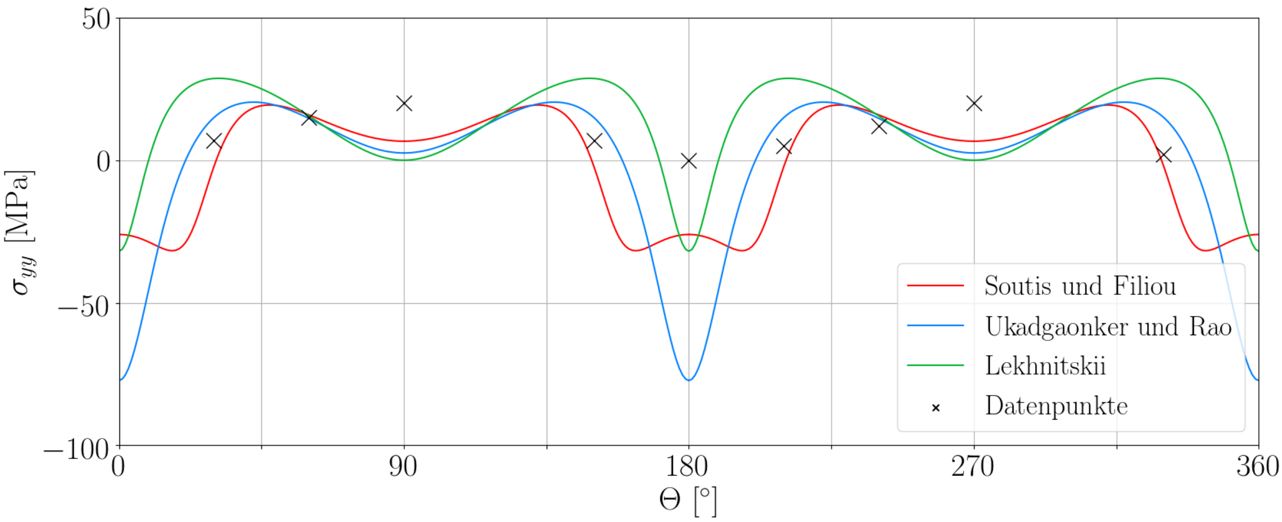


Abbildung 8.15: Spannungsverteilung σ_{yy} entlang eines Kreises mit $D = 6,95$ mm um die Bohrung ($d = 6,34$ mm) in einem 90°-Laminat mit $w = 32,03$ mm und $p = 35$ MPa und Datenpunkte aus den Versuchen

Die Kurven von Ukadgaonker und Lekhnitskii teilen den gleichen qualitativen Verlauf, unterscheiden sich jedoch dadurch, dass die Extrempunkte im positiven Spannungsbereich bei Lekhnitskii größer ausfallen, während die Extrempunkte im negativen Spannungsbereich bei Ukadgaonker stärker ausgeprägt sind. Bei den Winkeln $\theta = 90°$ und $\theta = 270°$ liegen alle Kurven nah beieinander, weisen aber relativ große Abstände zu den Datenpunkten auf. Auch bei $\theta = 180°$ ist ein großer Unterschied zwischen den Kurven und dem Datenpunkt zu erkennen, wobei Ukadgaonker an dieser Stelle im Vergleich zu den anderen Methoden sehr weit vom Datenpunkt entfernt ist und somit keine gute Darstellung der Versuchsergebnisse in diesem Bereich darstellt. Die Methode von Lekhnitskii verläuft annähernd wie die Datenpunkte und bildet eine befriedigende Beschreibung der Spannungsverteilung. Im Gegensatz dazu beschreibt Soutis die Datenpunkte bis auf bei $\theta = 180°$ genauer und stellt die beste Beschreibung der Spannungsverteilung dar, wobei angemerkt werden muss, dass keine der Methoden eine optimale Darstellung der experimentellen Daten bildet. Die zu Abbildung 8.14 und 8.15 gehörigen experimentellen Werte sind in Tabelle 8.4 aufgeführt.

Tabelle 8.4: Dehnungen auf einem Kreis ($D = 6,95\,\mathrm{mm}$) um die Bohrung ($d = 6,34\,\mathrm{mm}$) in einem 90°-Laminat mit $w = 32,03\,\mathrm{mm}$ und $p = 35\,\mathrm{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung

	θ [°]											
	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
ε_{xx} [10^{-2}]	-0,2	0,3	0,6	0,8	0,6	0,3	0,0	0,2	0,5	0,8	0,9	0,1
ε_{yy} [10^{-2}]	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,2	0,0
σ_{xx} [MPa]	-19	25	50	67	53	25	0	17	42	67	70	8
σ_{yy} [MPa]	-131	7	15	20	141	7	0	5	12	20	-230	2

8.3 Spannungsverteilung im QI−Laminat

Die Dehnungsverteilungen in Zugrichtung eines QI-Laminates sind in Abbildung 8.16 für die analytischen Methoden dargestellt. Zusätzlich zeigt die DIC Aufnahme die aus den Versuchen ermittelte Dehnungsverteilung.

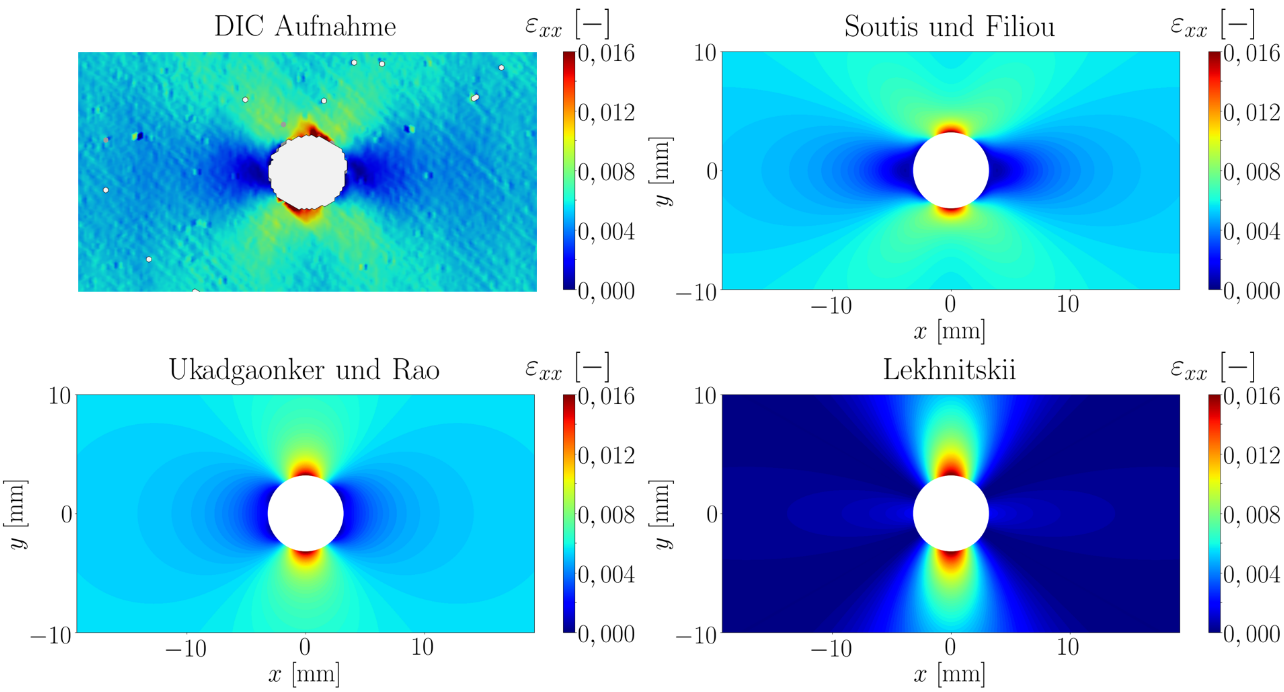


Abbildung 8.16: Dehnungsverteilung ε_{xx} in einem QI-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

Die Methode von Lekhnitskii fällt erneut durch ein anderes Farbschema auf und sagt für große Bereiche links und rechts der Bohrung, Dehnungen nahe Null voraus, während die anderen Bilder Dehnungen von ca. 0,006 aufweisen. Ein Vergleich mit der DIC Aufnahme zeigt, dass diese Vorhersage nicht mit den Ergebnissen aus dem Versuch übereinstimmt. Die Verteilungen von Soutis und Ukadgaonker sind ähnlich, unterscheiden sich jedoch vor allem in den Bereichen ober- und unterhalb der Bohrung. Soutis beschreibt die erhöhten Dehnungsbereiche eher in der Form einer Parabel und geringeren Dehnungen entlang des Querschnittes unter 90°, wohingegen die maximalen Dehnungen bei Ukadgaonker auf dem Querschnitt zu finden sind und zu den Seiten abnehmen. Ein Vergleich mit der DIC Aufnahme zeigt, dass die Vorhersage von Soutis besser mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt.

Die Dehnungen senkrecht zur Zugrichtung (ε_{yy}) sind in Abbildung 8.17 dargestellt. Auf den ersten Blick ist zu erkennen, dass die Methode von Lekhnitskii eine deutlich andere Dehnungsverteilung vorhersagt, als in der DIC Aufnahme gezeigt wird, wobei die Dehnungsverteilung am Bohrungsrand jedoch sehr akkurat ist.

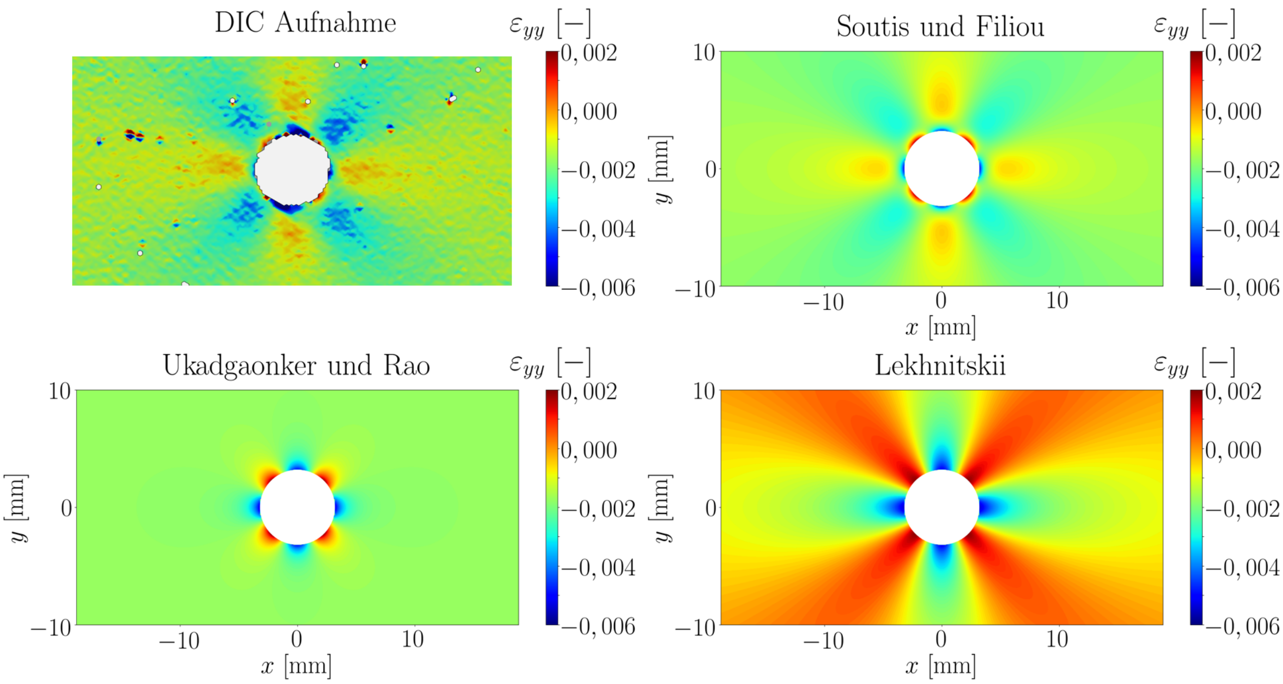


Abbildung 8.17: Dehnungsverteilung ε_{yy} in einem QI-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den analytischen Methoden; $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

Durch Multiplikation von Lekhnitskiis Verteilung am Bohrungsrand mit dem Vorfaktor zur Bestimmung der Spannungen in einem gewissen Abstand zur Bohrung werden die physikalischen Zusammenhänge zwischen der äußeren Last und der Verteilung im Laminat vernachlässigt, sodass sich hier der mathematische Charakter der Methode gut zeigt. Die Dehnungsverteilungen von Soutis und Ukadgaonker ähneln sich am Bohrungsrand, wobei sie bei Soutis etwas schwächer und weniger rund ausfällt als bei Ukadgaonker. Ein großer Unterschied zwischen Soutis und den übrigen Methoden ist, dass ein minimaler (maximaler) Dehnungsbereich um den Bohrungsrand von einem maximalen (minimalen) Dehnungsbereich entlang des radialen Weg nach außen gefolgt wird, während sich die anderen Methoden nach der initialen Dehnung am Bohrungsrand der Dehnung am Probenrand annähern. Ein Vergleich der DIC Aufnahme mit den Methoden lässt darauf schließen, dass die Methode von Soutis zu einem hohen Grad mit den Ergebnissen aus den Versuchen übereinstimmt.

Die qualitativen Dehnungsverteilungen γ_{xy} des QI-Laminates aus Abbildung 8.18 zeigen große Ähnlichkeiten zu denen des 90°-Laminates aus dem vorangegangenen Abschnitt. Lekhnitskii weist erneut große Dehnungsmaxima und -minima ober- und unterhalb der Bohrung mit starken radialen Ausläufen zum Rand auf. Zusätzlich lassen sich kleine Dehnungsmaxima und -minima links und rechts von der Bohrung erkennen, die im Vergleich zu den anderen Extrema sehr klein ausfallen. Ukadgaonker zeigt keine qualitativen Unterschiede zur Dehnungsverteilung im 90°-Laminat (vgl. Abbildung 8.11). So weist die Methode erneut ründliche maximale und minimale Dehnungsbereiche ober- und unterhalb der Bohrung auf, die geringe Ausläufe zum Rand aufweisen.

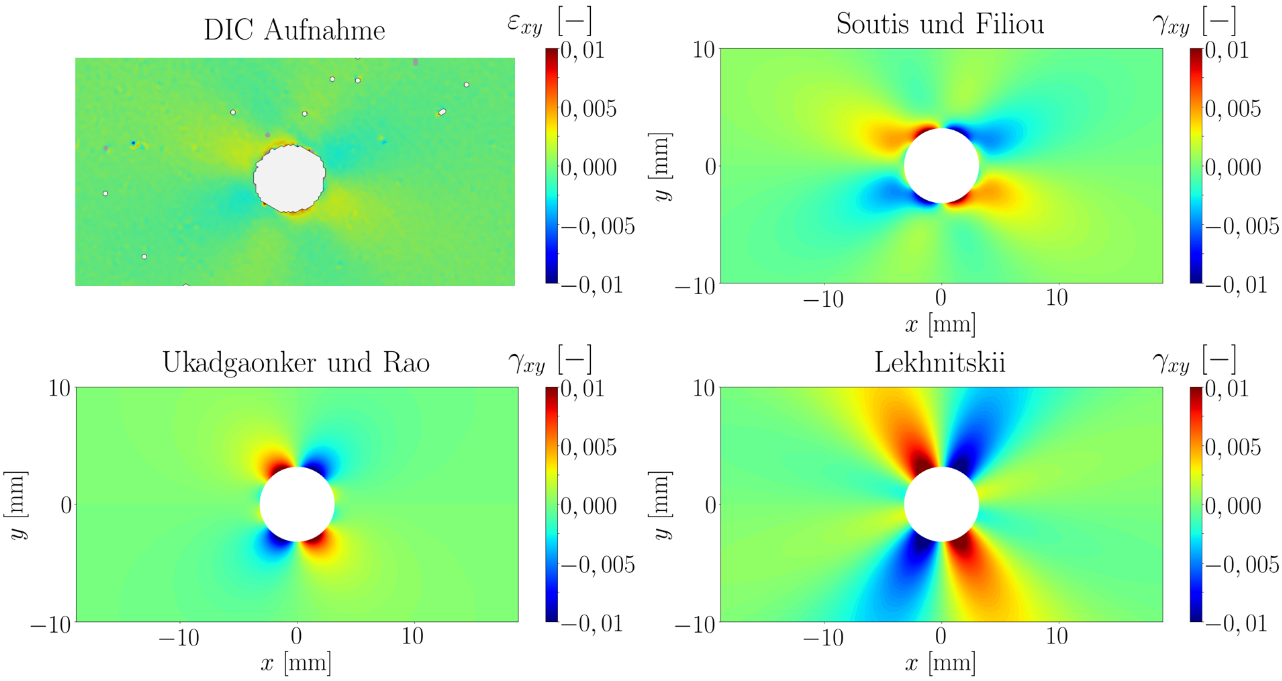


Abbildung 8.18: Dehnungsverteilung ε_{xy} in einem QI-Laminat aus dem Versuch im Vergleich mit den Dehnungen γ_{xy} der analytischen Methoden; $p = 267\,\mathrm{MPa}$ und Geometrie aus Tabelle 7.2

Soutis zeigt ebenfalls wie zuvor Dehnungsmaxima und -minima ober- und unterhalb der Bohrung. Die Formen dieser Bereiche können in unmittelbarer Nähe vom Bohrungsrand als abgeflachte Halbkreise bezeichnet werden. In weiterer Entfernung laufen die Dehnungsextrema in Zugrichtung aus und bilden ungewöhnliche Formen, die an Ahornnasen erinnern. Besonders dabei ist, dass die Dehnungsextrema nicht einfach radial nach außen auslaufen, sondern sich aufweiten und teilweise zurück zur horizontalen Hauptachse führen, sodass sich die Maxima und Minima für $y = 0$ beinahe treffen. Durch diese Verteilung entstehen in unmittelbarer Umgebung links und rechts der Bohrung kleine Bereiche mit Dehnungen annähernd Null, die von den

Dehnungsextrema eingeschlossen werden. Um qualitative Vergleiche zwischen den analytischen Methoden und der DIC Aufnahme anzustellen, wird die Dehnungsverteilung der DIC Aufnahme wie in den vorherigen Abschnitten von ε_{xy} in γ_{xy} umgerechnet (vgl. Abbildung 8.19). Ein Vergleich mit der Dehnungsverteilung von Soutis zeigt große Übereinstimmungen. Es sei darauf hingewiesen, dass die oben beschriebenen eingeschlossenen Bereiche links und rechts der Bohrung in der Verteilung von Soutis ebenfalls in der DIC Aufnahme zu sehen sind. Auch Bereiche betragsmäßig kleinerer Dehnungen, wie sie vor allem am Rand zu finden sind, werden durch Soutis sehr akkurat dargestellt. Die Methoden von Ukadgaonker und Lekhnitskii beschreiben im Vergleich mit der DIC Methode den Bohrungsmesser mit guter Genauigkeit, sind jedoch für Bereiche in größerer Entfernung von der Bohrung nicht geeignet.

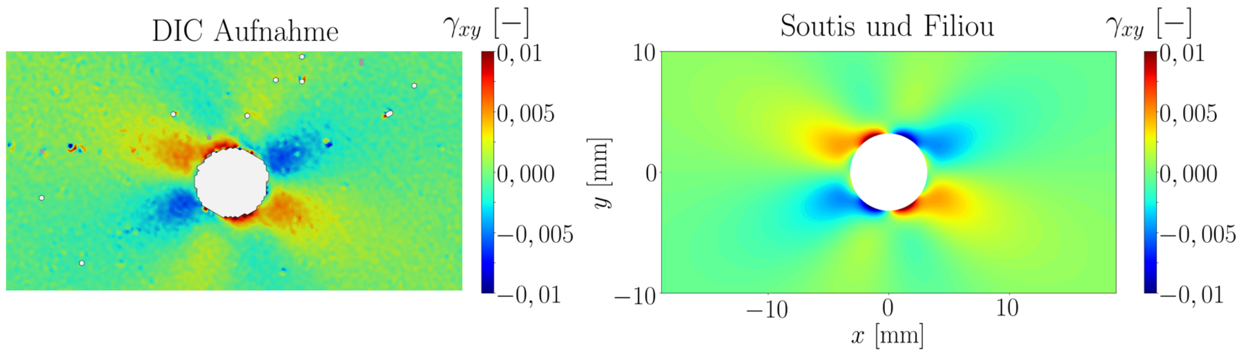


Abbildung 8.19: Gegenüberstellung der Dehnungsverteilungen γ_{xy} in einem QI-Laminat von Soutis aus Abbildung 8.18 und der Verteilung aus dem Versuch

Die dimensionslosen Spannungsverläufe aus den analytischen Methoden für ein QI-Laminat im engsten Querschnitt wurden bereits in Abbildung 5.8 dargestellt. Es folgt nun ein quantitativer Vergleich der Kurvenverläufe mit den experimentellen Werten, die durch einen Schnitt durch das Laminat in GOM erzeugt werden (vgl. Abbildung A.13). Eine Visualisierung der Dehnungen im Querschnitt erfolgt in Abbildungen A.7 und A.8. Wie zuvor werden die experimentellen Spannungen aus den Dehnungen in Zugrichtung und senkrecht dazu für beide Seiten bestimmt. Die gemittelten Spannungen werden in Abbildung 8.20 als Datenpunkte dargestellt, wobei die Standardabweichung der Spannungen als Intervall für die Fehlerindikatoren verwendet wird.

Die Kurvenverläufe aller Methoden weisen große Ähnlichkeiten zu denen für das 90°-Laminat auf. Da die komplexen Parameter des QI-Lamiantes die Werte $\pm i$ annehmen, starten alle Kurven bei der gleichen Spannung am Bohrungsrand. Die Kurven von Soutis und Ukadgaonker nähern sich mit steigendem Abstand zur Bohrung asymptotisch der äußeren Last, während Lekhnitskii kontinuierlich über den Querschnitt mit dem Faktor R/r sinkt. Da die Kurve von Lekhnitskii keine zufriedenstellende Ergebnisse liefert, wird die Methode in der nachfolgenden Betrachtung der relativen Fehler nicht berücksichtigt.

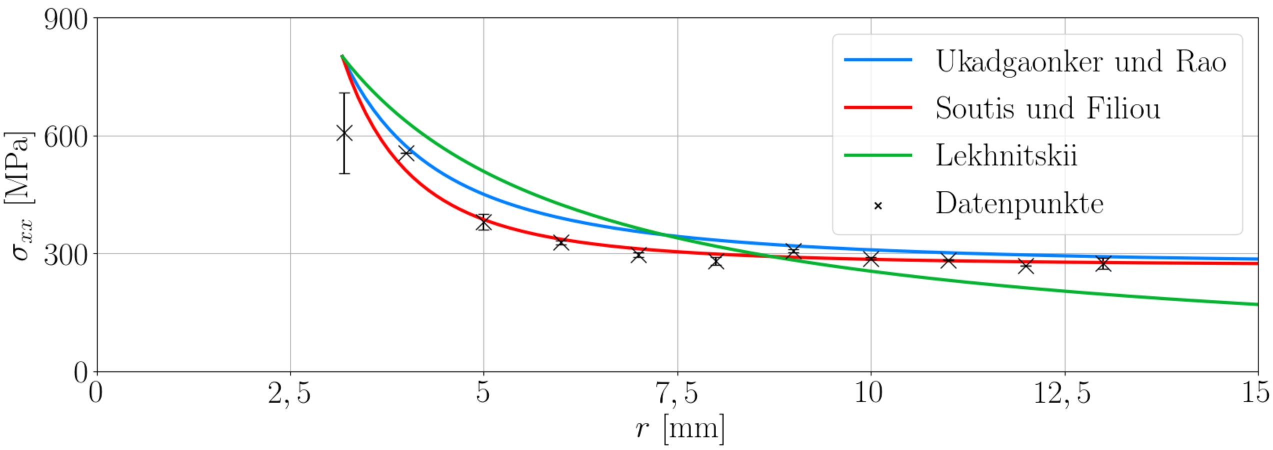


Abbildung 8.20: Vergleich der analytischen Methoden mit Datenpunkten aus den Versuchen im Querschnitt eines QI-Laminates unter $\theta = 90°$ mit $p = 267\,\text{MPa}$ und der Geometrie aus Tabelle 7.2

Die relativen Fehler zwischen den Kurven von Soutis und Ukadgaonker und den Datenpunkten sind in Tabelle 8.5 zu finden. Es ist auffällig, dass die Fehler in unmittelbarer Nähe des Bohrungsrandes ($r = 3,2\,\text{mm}$) relativ groß ausfallen.

Tabelle 8.5: Dehnungen verschiedener Punkte entlang eines Querschnittes unter $\theta = 90°$ in einem QI-Laminat mit $p = 267\,\text{MPa}$ und die daraus resultierende Spannung; Vergleich mit den aus Tabellen abgelesenen Werten für die Kurven von Soutis und Ukadgaonker

	r [mm]										
	3,2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varepsilon_{xx,l}$ [10^{-2}]	1,16	1,16	0,73	0,63	0,57	0,57	0,60	0,58	0,60	0,56	0,61
$\varepsilon_{xx,r}$ [10^{-2}]	1,44	1,16	0,77	0,63	0,59	0,53	0,61	0,58	0,58	0,54	0,55
$\varepsilon_{yy,l}$ [10^{-3}]	-6,75	-3,56	-1,67	-0,77	-0,85	-0,65	-1,03	-1,35	-2,17	-1,80	-2,15
$\varepsilon_{yy,r}$ [10^{-3}]	-3,30	-3,59	-0,57	-0,11	-0,74	-0,70	-1,01	-1,27	-1,72	-1,31	-1,85
$\sigma_{xx,l}$ [MPa]	504	556	359	322	290	291	303	284	284	268	289
$\sigma_{xx,r}$ [MPa]	710	555	400	333	303	270	309	289	282	268	261
$\varnothing\, \sigma_{xx}$ [MPa]	607	556	380	327	296	280	306	287	283	268	275
SAW [MPa]	102,8	0,5	20,6	5,6	6,2	10,4	3,1	2,9	1,1	0,2	13,7
$\sigma_{xx,\text{SF}}$ [MPa]	787	514	387	336	311	298	290	285	281	278	276
$\Delta_{\text{rel.}}$ [%]	29,65	7,55	1,84	2,75	5,07	6,43	5,23	0,70	0,71	3,73	0,36
$\sigma_{xx,\text{UR}}$ [MPa]	791	576	451	390	355	333	319	310	302	296	291
$\Delta_{\text{rel.}}$ [%]	30,31	3,60	18,68	19,27	19,93	18,93	4,25	8,01	6,71	10,45	5,82

Dies kann durch die sensible Abhängigkeit vom Abstand, wie sie in den vorherigen Abschnitten schon erwähnt wurde, aber auch durch große Wertschwankungen, erkennbar durch das große Fehlerintervall an dieser Stelle, begründet werden. Für den restlichen Querschnitt stellt Soutis mit relativen Fehlern von maximal $7,6\%$ eine sehr gute Repräsentation der experimentellen Ergebnisse dar, die vor allem mit steigendem Abstand zur Bohrung noch genauer wird (maximaler relativer Fehler ab $r = 10\,\text{mm}$: $3,73\%$). Die Kurve von Ukadgaonker verläuft über der von

Soutis und lässt größere Abstände zu den Datenpunkten erkennen, was durch die Betrachtung der relativen Fehler bestätigt wird (kleinster relativer Fehler: 3,6%). Nichtsdestotrotz zeigt die Kurve von Ukadgaonker in Abbildung 8.20 gute Annäherungen an die experimentellen Werte.

Neben der Spannungsverteilung entlang des engsten Querschnittes weist auch die Verteilung σ_{xx} entlang eines Kreises um die Bohrung große Ähnlichkeiten zu den entsprechenden Verläufen des 90°-Laminates auf (vgl. Abbildung 8.21).

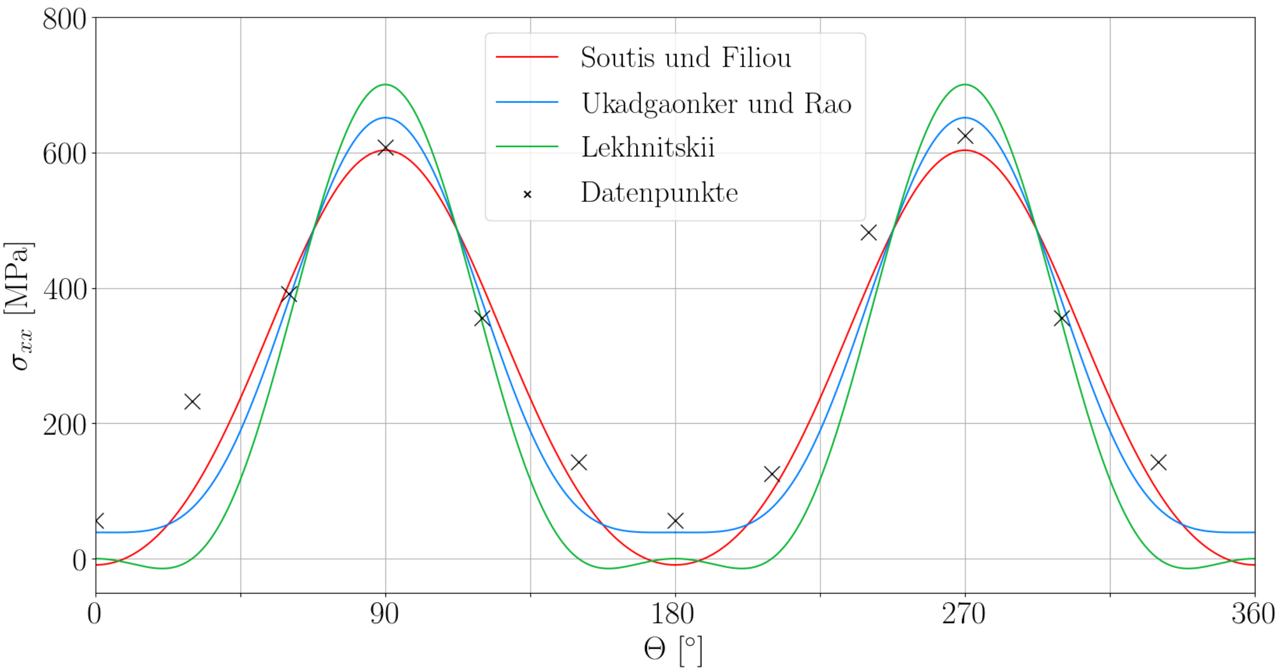


Abbildung 8.21: Spannungsverteilung σ_{xx} entlang eines Kreises mit $D = 7,26\,\text{mm}$ um die Bohrung ($d = 6,35\,\text{mm}$) in einem QI-Laminat mit $w = 32,05\,\text{mm}$ und $p = 267\,\text{MPa}$ und Datenpunkte aus den Versuchen

Die Datenpunkte stammen aus der Auswertungssoftware und werden über das in den vorherigen Abschnitten beschriebene Verfahren der Abtastfähnchen generiert (vgl. Abbildung A.14). Die exakten Spannungen sind in Tabelle 8.6 zu finden. Die qualitativen Verläufe aller Methoden sind ähnlich, unterscheiden sich allerdings für die Winkel $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$. Bei diesen Winkeln stellen sich drei unterschiedliche Verläufe ein. So erfährt die Kurve von Soutis an dieser Stelle beispielsweise ein globales Minimum, während Lekhnitskii ein lokales Maximum vorweist und Ukadgaonker einen ungefähr horizontalen Verlauf darstellt. Alle Kurven zeigen gute Übereinstimmungen mit den Datenpunkten über das gesamte Winkelintervall, wobei Lekhnitskii die Methoden mit den größten Abweichungen zu den experimentellen Werten repräsentiert. Soutis und Ukadgaonker beschreiben die Datenpunkte genauer als Lekhnitskii, wechseln sich jedoch ständig in der Rolle der genausten Methode ab. So ist die Übereinstimmung von Soutis mit dem Datenpunkt unter $\theta = 90°$ sehr genau und besser als von Ukadgaonker, während bei $\theta = 180°$

das umgekehrte Phänomen beobachtet werden kann. Für diesen Fall lässt sich festhalten, dass alle Methoden eine befriedigende Vorhersage treffen, wobei Soutis und Ukadgaonker leicht bessere Ergebnisse vorweisen als Lekhnitskii.

Die Spannungsverläufe senkrecht zur Zugrichtung in Abbildung 8.22 weisen ebenfalls ähnliche Verläufe wie im 90°-Laminat auf mit dem Unterschied, dass die Extremwerte von Lekhnitskii betragsmäßig am größten sind. Der Grund hierfür ist, dass der Elastizitätsmodul im Gegensatz zum 90°-Laminat in Zugrichtung größer ausfällt als senkrecht dazu.

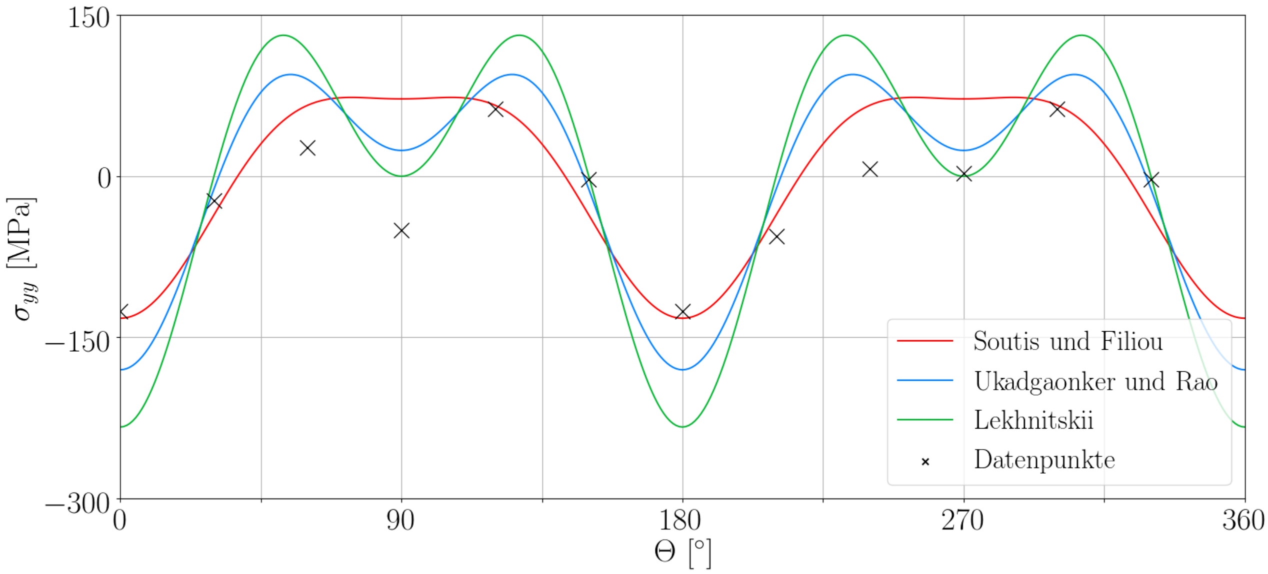


Abbildung 8.22: Spannungsverteilung σ_{yy} entlang eines Kreises mit $D = 7,26$ mm um die Bohrung ($d = 6,35$ mm) in einem QI-Laminat mit $w = 32,05$ mm und $p = 267$ MPa und Datenpunkte aus den Versuchen

Alle Kurven weisen globale Minima unter den Winkeln $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ vor. In um 90°-Schritten dazu gedrehten Positionen liegen bei Ukadgaonker und Lekhnitskii lokale Minima vor, die von globalen Maxima eingeschlossen werden, während Soutis über einen weiten Bereiche annähernd horizontal verläuft. Die Wertschwankungen der Datenpunkte fallen besonders in diesem Diagramm sehr stark aus, wie aus Abbildung 8.22 ersichtlich wird. Als Folge daraus gibt es keine Methode, die eindeutig die beste Beschreibung der Spannungsverteilung darstellt.

Tabelle 8.6: Dehnungen auf einem Kreis ($D = 7,26$ mm) um die Bohrung ($d = 6,35$ mm) in einem QI-Laminat mit $w = 32,05$ mm und $p = 267$ MPa und die daraus resultierende Spannung

	θ [°]											
	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
ε_{xx} [10^{-2}]	0,2	0,5	0,8	1,3	0,7	0,3	0,2	0,3	1,0	1,3	0,7	0,3
ε_{yy} [10^{-2}]	-0,3	-0,2	-0,2	-0,5	-0,1	-0,1	-0,3	-0,2	-0,3	-0,4	-0,1	-0,1
σ_{xx} [MPa]	56	233	392	608	356	143	56	126	482	625	356	143
σ_{yy} [MPa]	-126	-23	27	-50	63	-3	-126	-56	7	3	63	-3

8.4 Korrekturfaktor für endliche Platten

Die in der Arbeit verwendeten Gleichungen für die Berechnung der Spannungsverteilungen wurden alle auf der Basis von unendlich großen Platten hergeleitet. Aus der Literatur ist jedoch bekannt, dass die Geometrie der Platte einen Einfluss auf die Spannungsverteilung hat [29]. Dieser Einfluss hängt vom Verhältnis der Plattenweite zum Bohrungsdurchmesser (w/d) ab. Der Effekt hat zur Folge, dass die Spannungsüberhöhung am Bohrungsrand und folglich auch die Spannungen im Rest der Platte größer sind, als im Fall einer unendlich großen Platte. Ein Korrekturfaktor für endliche Weiten (engl.: FWC) wurde von Tan [29] vorgeschlagen, der mit der Spannungsverteilung einer unendlichen Platte multipliziert werden soll, um die Verteilung in einer endlichen Platte zu erhalten. Dieser hängt nur von der Geometrie der Platte ab und ist folgendermaßen definiert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{FWC} &= 1 - \frac{d}{w}M + \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{-\mu_2}{1+i\mu_1}\left(\frac{d}{w}M - 1 + i\mu_1\left(\frac{d}{w}M\right)\right.\right.\right.\\ &\quad \left. + \sqrt{1-(1+\mu_1^2)\left(\frac{d}{w}M\right)^2}\right) + \frac{\mu_1}{1+i\mu_2}\left(\frac{d}{w}M - 1 + i\mu_2\left(\frac{d}{w}M\right)\right.\\ &\quad \left.\left.\left. + \sqrt{1-(1+\mu_2^2)\left(\frac{d}{w}M\right)^2}\right)\right]\right\},\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

$$\text{mit} \quad M^2 = \frac{\sqrt{1-8\left[\dfrac{3(1-d/w)}{2+(1-d/w)^3}-1\right]}-1}{2(d/w)^2}.$$

Die Ergebnisse in den Abschnitten 5 bis 8 werden ohne Multiplikation mit dem Korrekturfaktor angefertigt, da die Untersuchung der analytischen Methoden ohne den Einfluss von Fremdeinwirkungen vollzogen werden soll. Außerdem beträgt der Korrekturfaktor für die gegebenen Geometrien ($w/d \approx 5$) lediglich $1,04$ und hätte somit keinen großen Einfluss auf die Ergebnisse, wie durch die hohe Übereinstimmung mit den Versuchsdaten bestätigt wird (vgl. Abbildungen 8.5 bis 8.18).

Tabelle 8.7: Berechnung einiger Korrekturfakoren für verschiedene Verhältnisse aus Plattenweite zu Bohrungsdurchmesser

Verhältnis w/d	2	4	8
FWC	1,417	1,076	1,017

Nichtsdestotrotz soll der Effekt hier der Vollständigkeit halber erwähnt werden. Für kleinere w/d-Verhältnisse wird der Korrekturfaktor relevanter (vgl. Tabelle 8.7). In Abbildung 8.23 sind die Spannungsverteilungen für QI-Laminate konstanter Weite und unterschiedlichen Bohrungsdurchmessern unter Verwendung der Korrekturfaktoren aus Tabelle 8.7 gezeigt. Durch den Korrekturfaktor werden die Kurven in y-Richtung gestreckt, sodass sie bei einer größeren Spannung als im Fall unendlicher Weiten beginnen und sich asymptotisch der mit dem Korrekturfaktor multiplizierten äußeren Last nähern.

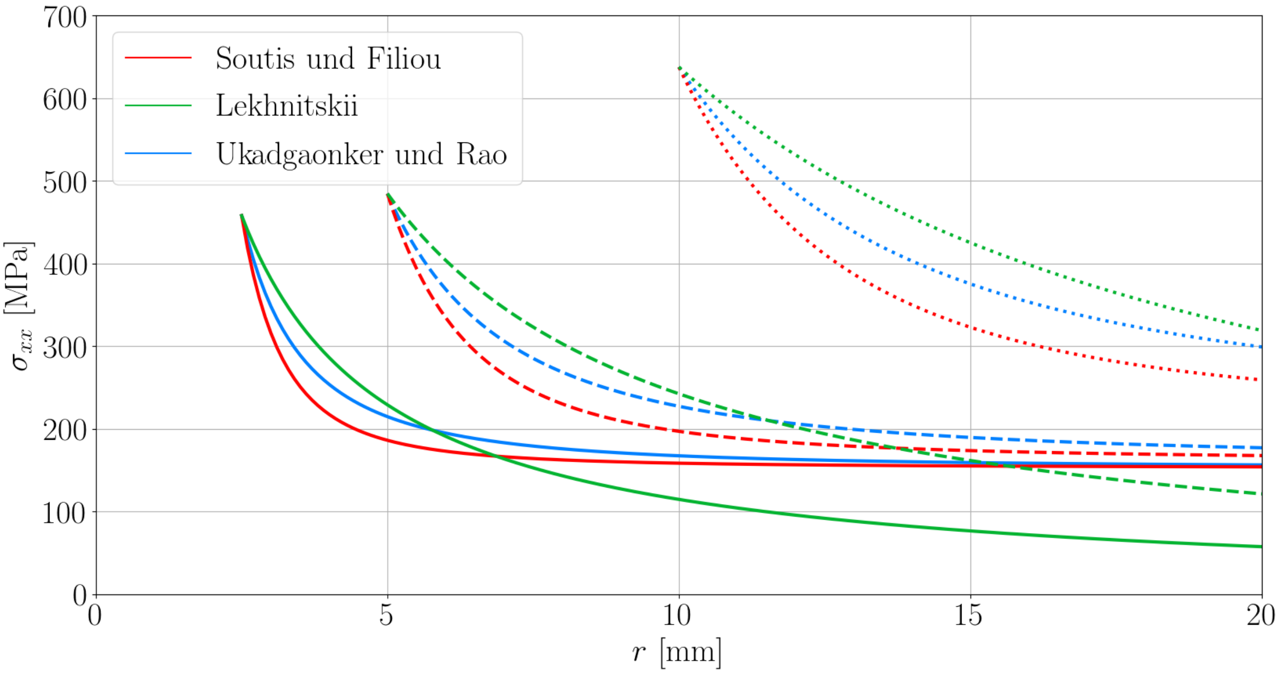


Abbildung 8.23: Vergleich der Spannungsverläufe für unterschiedliche Bohrungsdurchmesser an einem QI-Laminat mit Weite $w = 40\,\mathrm{mm}$ unter der äußeren Last $p = 150\,\mathrm{MPa}$ und unter Verwendung des Geometriekorrekturfaktors (gepunktet: $d = 20\,\mathrm{mm}$, gestrichelt: $d = 10\,\mathrm{mm}$, durchgezogen: $d = 5\,\mathrm{mm}$)

9 Zusammenfassung und Ausblick

Die Untersuchung von analytischen Methoden zur Bestimmung der Spannungsverteilung in Faserverbundstrukturen mit einer kreisrunden Aussparung unter Zugbelastung erfolgt in mehreren Schritten, die im folgenden Abschnitt kurz zusammengefasst werden sollen. Danach wird ein Ausblick über zukünftige Forschungspotentiale gegeben.

9.1 Zusammenfassung

Eine Literaturrecherche wird durchgeführt, um einen Überblick über die Kontributionen zum Thema Spannungsverteilung in Platten mit Aussparungen zu geben und um geeignete Methoden für die Untersuchung zu finden von denen drei ausgewählt werden. In einer Parameterstudie werden anschließend der Bohrungsdurchmesser, die äußere Last und das Material als Einflussgrößen auf die Spannungsverteilung identifiziert und auf ihre Wirkung auf eben diese untersucht. Die Untersuchung erfolgt am engsten Querschnitt des Laminates. Der Bohrungsdurchmesser stellt sich als Streckungsfaktor der Kurve, welche die Spannungen über den Abstand zum Bohrungsmittelpunkt aufträgt, in Richtung des radialen Abstandes heraus. Die äußere Last kann ebenso als Streckungsfaktor interpretiert werden, welcher die Kurve in Richtung der resultierenden Spannung streckt. Durch Normieren der Achsen mit der äußeren Last bzw. dem Bohrungsradius kann eine dimensionslose Darstellung der Methoden erzielt werden, welche für alle Lasten sowie Bohrungen gültig ist und nur vom Material abhängt. Das Material beeinflusst in Abhängigkeit vom Grad der Anisotropie und der Materialeigenschaften die Spannungskonzentration im gesamten Laminat, also das Verhältnis von innerer Spannung zur äußeren Last. Dabei kann durch eine Betrachtung der Elastizitätsmoduln in Zugrichtung und senkrecht dazu zunächst vorhergesagt werden, ob die Spannungsüberhöhung kleiner oder größer als im isotropen Fall ausfällt. Ein anschließender Vergleich der komplexen Materialparameter bzw. eine Betrachtung des Grades der Anisotropie erlaubt eine qualitative Einschätzung, wie intensiv die Spannungsüberhöhung wird.

Aus der Betrachtung der Spannungsverteilung um den Bohrungsrand bzw. in Kreisen mit größerem Durchmesser als dem der Bohrung um den Bohrungsmittelpunkt folgt die Erkenntnis, dass die Beziehungen zwischen den einzelnen Kurvenverläufen der analytischen Methoden vom Winkel abhängen, unter dem ein Laminatquerschnitt betrachtet wird. Das heißt, dass sich Methoden unter bestimmten Winkeln stark ähneln, jedoch auch unter anderen Winkeln große Unterschiede aufweisen können.

Betrachtet man viele Querschnitte unter einer Vielzahl unterschiedlicher Winkel, entstehen Spannungsverteilungen für das gesamte Laminat. Diese zweidimensionale Darstellung der Spannungen eignet sich besonders gut für den qualitativen Vergleich von Methoden untereinander, sowie mit experimentellen Ergebnissen, wie es in dieser Arbeit beispielsweise mit DIC Aufnahmen durchgeführt wird. Bei dem Vergleich stellt sich die Spannungsverteilung von Lekhnitskii [7] in Kombination mit dem Vorfaktor von Mortensen und Thomsen [26] zur Erweiterung der Verteilung am Bohrungsrand auf das gesamte Laminat als ungenaue Methode heraus. Durch den mathematischen Charakter der Methode werden physikalische Gegebenheiten und Phänomene in einiger Entfernung vom Bohrungsrand nicht berücksichtigt, sodass es dort zu großen Abweichungen von den experimentellen Daten kommt. Der Grad der Abweichung hängt dabei von der äußeren Last sowie den Materialeigenschaften ab und kann wegen der hohen Komplexität der Zusammenhänge nicht allgemein vorhergesagt werden, sondern muss für jeden Fall individuell erfolgen. Die Methode von Ukadgaonker und Rao [14] stimmt in vielen Fällen mit den Experimenten überein, wobei sie in manchen Fällen ungenaue Ergebnisse liefert. Die Methode von Ukadgaonker und Rao sagt meist größere Spannungen voraus, als in den Experimenten ersichtlich wird, und stellt somit eine eher konservative Methode für eine Strukturvorauslegung dar. Die Methode von Soutis und Filiou [15] erweist sich aus den untersuchten Methoden als die mit den genausten Ergebnissen. In allen untersuchten Fällen stellt die Methode von Soutis und Filiou die genaueste Abbildung der Versuchsergebnisse mit hoher qualitativer und quantitativer Genauigkeit dar. In ein paar Fällen unterschätzt die Methode jedoch die in den Experimenten bestimmten Spannungen, sodass im Sinne einer Vorauslegung von Strukturen erhöhte Vorsicht angebracht ist.

Die Klassische Laminattheorie erlaubt eine Verteilung der Laminatspannungen auf die einzelnen Lagen. Die Spannungsverläufe können dann sowohl in einem Querschnitt, als auch in einem Kreis um den Bohrungsmittelpunkt analysiert werden. Dabei sind die Spannungskonzentrationen in den einzelnen Lagen abhängig von der Faserorientierung der Lage, sowie dem Anteil der Lage am Gesamtlaminat. Es stellt sich heraus, dass sich Spannungen in unterschiedlichen Lagen gegenseitig aufheben können, sodass die Spannung des Gesamtlaminates zu Null wird, obwohl die einzelnen Lagen eine Belastung erfahren. Durch die Spannungsverteilungen können Orte mit großen Spannungsdifferenzen zwischen Einzellagen bestimmt werden, an denen erhöhte Gefahr von Delamination herrscht.

9.2 Ausblick

Um die in dieser Arbeit präsentierten Ergebnisse zu validieren und um weitere mögliche Phänomene und Abhängigkeiten der Spannungsverteilungen zu entdecken, sind weitere Laminate zu untersuchen. Zugleich hilft eine größere Datenbasis dabei zu untersuchen, ob die präsentierten Ergebnisse auf Laminate allgemein anwendbar sind, oder Spezialfälle darstellen.

Zur qualitativen und quantitativen Bewertung der Spannungen in den Einzelschichten sowie des gesamten Laminates bieten sich Finite-Elemente-Methoden an, mit Hilfe derer die einzelnen Schichten und das Laminat modelliert werden können, um die jeweiligen Spannungen zu bestimmen. Dabei sind vor allem die Unterschiede zwischen den einzelnen Lagen von Interesse, da im Vergleich zum Laminat keine Vergleichsmöglichkeiten mit experimentellen Daten bestehen.

Weitere Möglichkeiten interessanter Ergebnisse zukünftiger Forschungen bietet die Betrachtung des Phänomens von Kurvenschneiden bei unterschiedlichen Laminaten in Kombination mit der Auswertung von Integralen über die Spannungskurven, wie sie in Abschnitt 5 erwähnt werden. Die Ergebnisse könnten dabei helfen die Methoden im Hinblick auf die Übereinstimmung mit der Realität zu bewerten und feststellen wie gut die Methoden die zugrunde liegenden physikalischen Phänomene berücksichtigen. Ein mögliche Fragenstellung ist zum Beispiel, ob die im engsten Querschnitt übertragende Kraft unabhängig von der Geometrie ist. Durch Integralbetrachtungen können ebenfalls die Effekte des Geometriekorrekurfaktors auf die Spannungsverteilung untersucht werden. Außerdem können dadurch die Güte und die Anwendungsberechtigung überprüft werden.

Literaturverzeichnis

[1] Leichtbau in mobilität und fertigung, 2012. Studie in Kooperation von e-mobil BW GmbH und Fraunhofer-Institut für Produktionstechnik und Automatisierung und Universität Stuttgart und Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Fahrzeugkonzepte.

[2] K. Drechsler. Leichtbau - entwicklung, bedeutung und disziplinen. Themenheft Forschung und Leichtbau.

[3] Leichtbau - trends und zukunftsmärkte und deren bedeutung für baden-württemberg, 2014. Studie im Auftrag der Leichtbau BW GmbH - Koordination durch Fraunhofer-Institut für System- und Innovationsforschung ISI.

[4] J. Wiedemann. *Leichtbau - Elemente und Konstruktion*. Springerverlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[5] J. Koord und E. Petersen und D. Stefaniak und C. Hühne. Analytical design methodology for multi-row multi-column fasterner joints in composite structures. *SAMPE Europe Conference Southampton*, 2018.

[6] R. D. B. Sevenois und S. Koussios. Analytic methods for stress analysis of two-dimensional flat anisotropic plates with notches: An overview. *Applied Mechanics Reviews*, 66(6), 2014.

[7] S. G. Lekhnitskii. *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach Science Publishers, 1968. Aus der zweiten russischen Version übersetzt von S. W. Tsai und T. Cheron.

[8] N. Muskelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer-Verlag Netherlands, 1953.

[9] S. Tang. Interlaminar stresses around circular cutouts in composite plates under tension. *AIAA Journal*, 15(11):pages 1631–1637, 1977.

[10] T. de Jong. Stresses around rectangular holes in orthotropic plates. *J. Compos. Mater.*, pages 311–328, 1981.

[11] M. Grayley. elastic stress and strain distributions around circular holes in infinite plates of orthotropic material (applicable to fibre reinforced composites). Technical report, ESDU85001, ESDU, London, UK, 1985.

[12] J. Daoust und S. Hoa. An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes. *Compos. Struct.*, pages 107–130, 1991.

[13] Xin-Lin Gao. A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1996.

[14] V. G. Ukadgaonker und K. N. Rao. A general solution for stresses around holes in symmetric laminates under inplane loading. *Composite Structures*, 49:339–354, 2000.

[15] C. Filiou und C. Soutis. Compression-failure modelling under biaxial loading. Technical report, DRA, 1995. Progress Report 2, Agreement no. SMCFU/654.

[16] C. Soutis und C. Filiou. Stress distributions around holes in composite laminates subjected to biaxial loading. *Applied Composite Materials*, 5(6):pages 365–378, 1998.

[17] C. A. Echavarria Lopez. *Analyse d'une plaque orthotrope avec trou: application aux assemblages en bois*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.

[18] Hu Junshan und Zhang Kaifu und Cheng Hui und Liu Ping und Zou Peng und Song Danlong. Stress analysis and damage evolution in individual plies of notched composte laminates subjected to in-plane loads. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016.

[19] R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis, Inc., Philadelphia, 1999.

[20] swiss-composite info. Faserverbund - werkstoffdaten.

[21] Kmaran Tavakoldavani. Composite materials equivalent properties in lamina, laminate and structure levels. Master's thesis, Graduate School of The University of Texas and Arlington, 2014.

[22] D. Gross und W. Hauger und J. Schröder und W. A. Wall. *Technische Mechanik 2*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

[23] J. R. Barber. *Elasticity*. Springer-Verlag Dordrecht, 2002.

[24] F. C. Campbell. *Structural Composite Materials*. ASM International, 2010.

[25] G. N. Savin. *Stress distribution around holes*. National Aeronautics and Space Administration, 1970. übersetzt aus "Raspredeleniye Naprayazheniy Okolo Otversity".

[26] F. Mortensen und O. T. Thomsen. Theoretical background of esacomp analyses. Technical report, Aalborg University, Institut of Mechanical Engineering, Denmark, 2000.

[27] J. Awerbuch und M. S. Madhukar. Notched strength of composite laminates: Predictions and experiments - a review. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1985.

[28] GOM GmbH. *Grundlagen der digitalen Bildkorrelation und Dehnungsberechnung*, 2018.

[29] S. C. Tan. Finite-width correction factors for anisotropic plate containing a central opening. *Journal of Composite Materials*, pages 1080–1097, 1988.

A Anhang

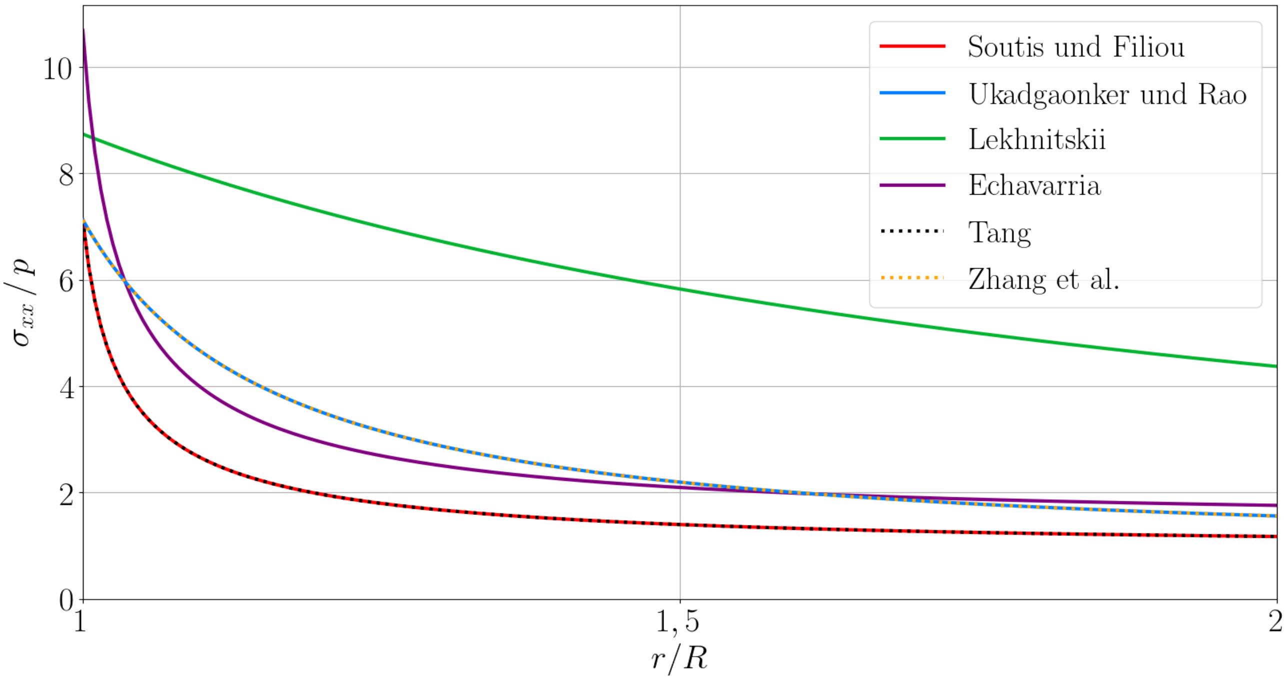


Abbildung A.1: Dimensionsloser Vergleich von Spannungsverteilungen mehrerer analytischer Methoden an einem rein aus 0°-Lagen bestehenden Laminat des Materials M21/T700GC

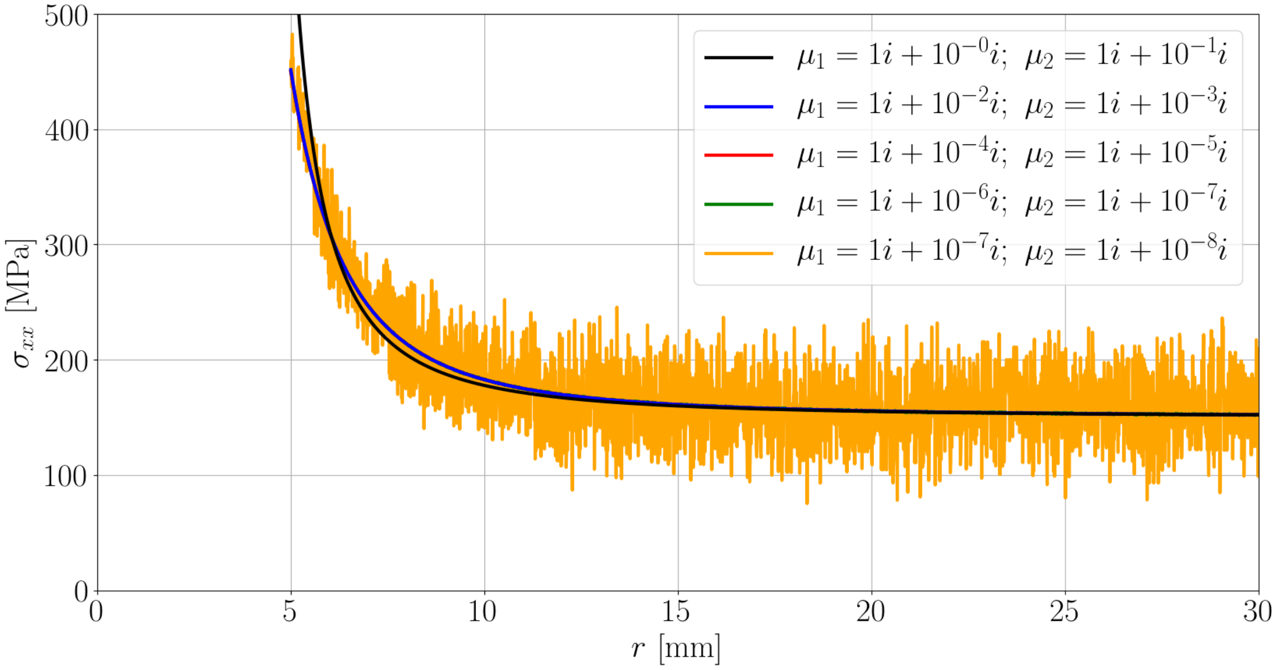


Abbildung A.2: Einfluss unterschiedlicher Genauigkeiten der komplexen Parameter eines QI-Laminates auf die Spannungsverläufe von Soutis

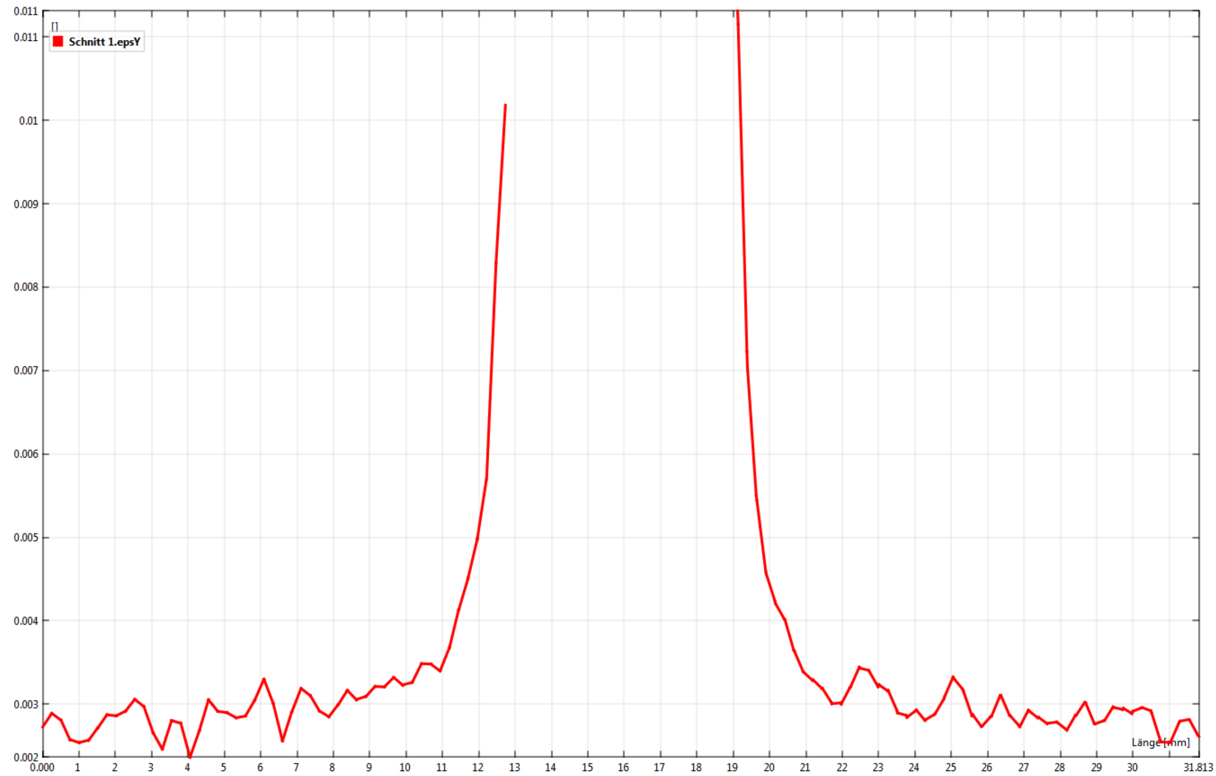


Abbildung A.3: Dehnungen ε_{xx} im Querschnitt eines 0°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate

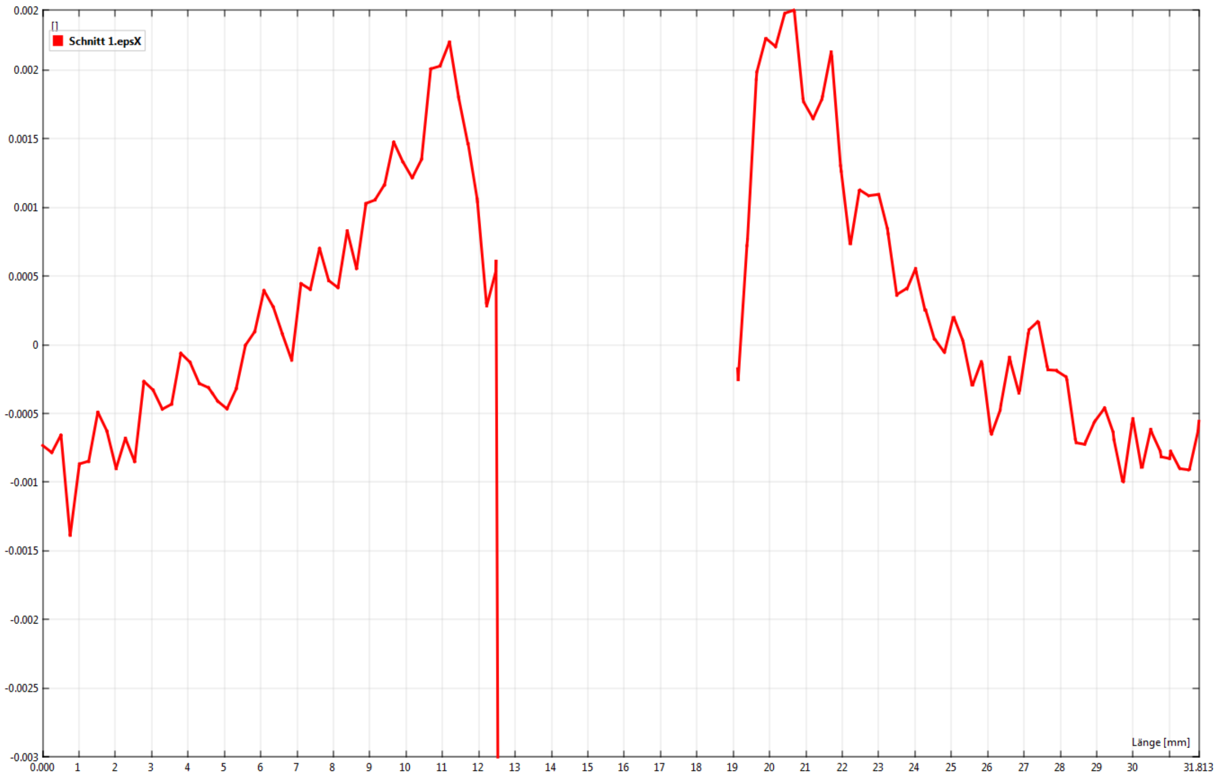


Abbildung A.4: Dehnungen ε_{yy} im Querschnitt eines 0°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate

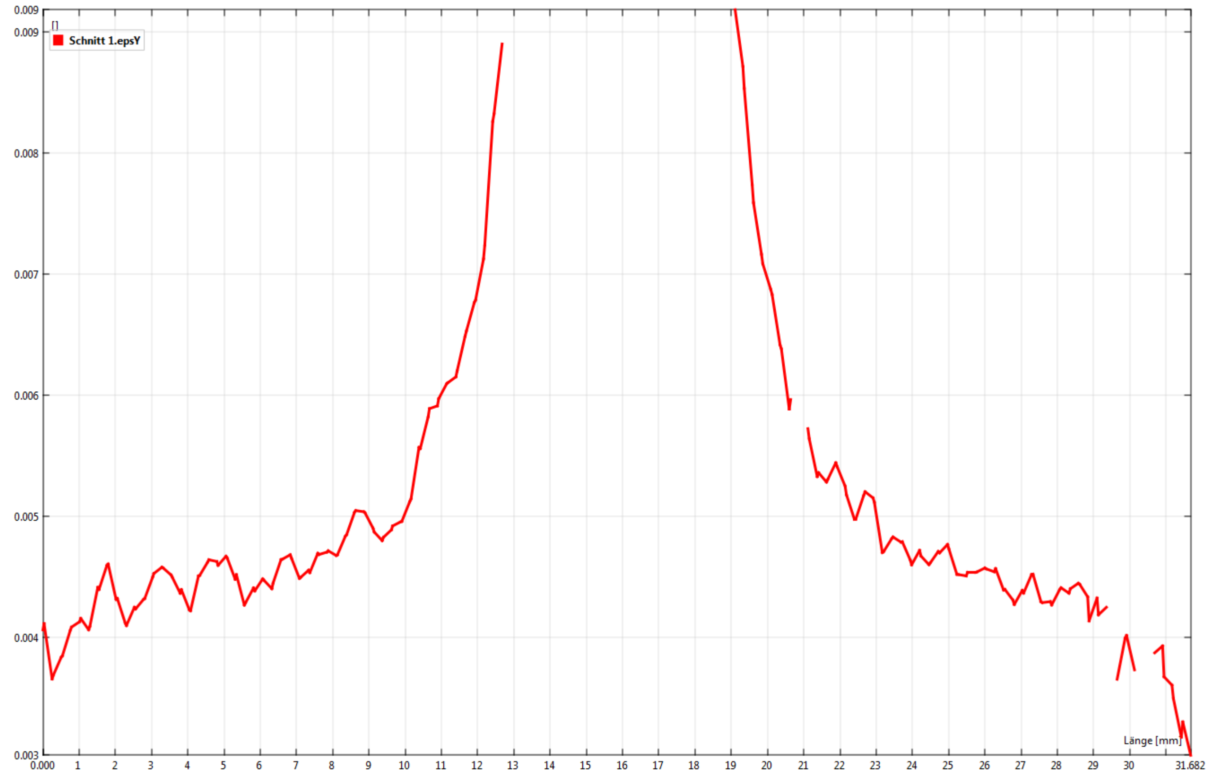


Abbildung A.5: Dehnungen ε_{xx} im Querschnitt eines 90°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate

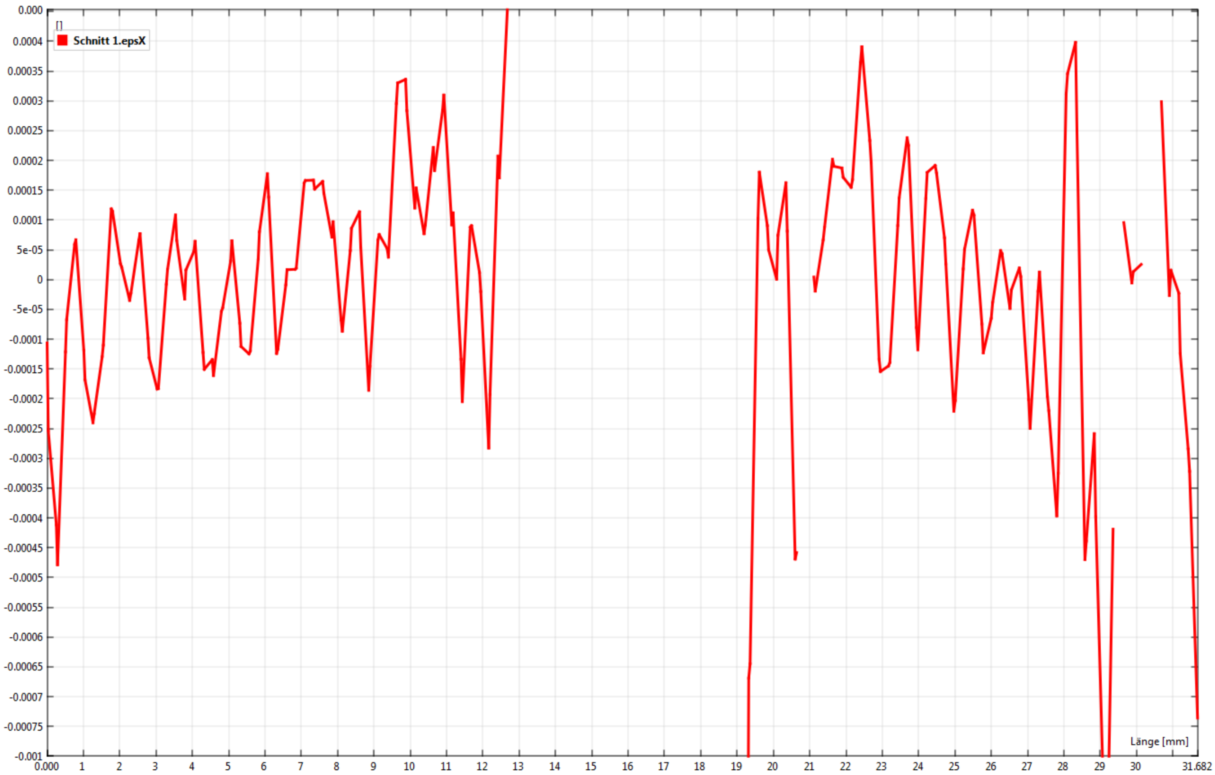


Abbildung A.6: Dehnungen ε_{yy} im Querschnitt eines 90°-Laminates; erstellt mit GOM Correlate

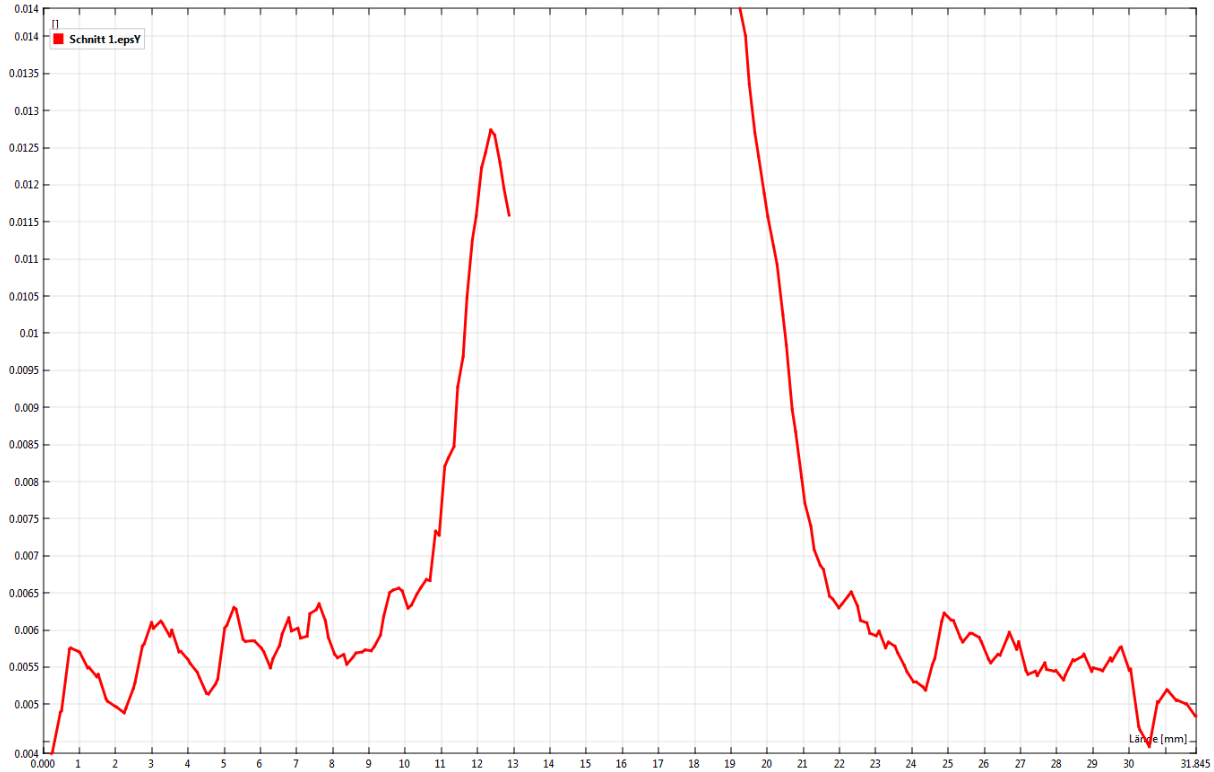


Abbildung A.7: Dehnungen ε_{xx} im Querschnitt eines QI-Laminates; erstellt mit GOM Correlate

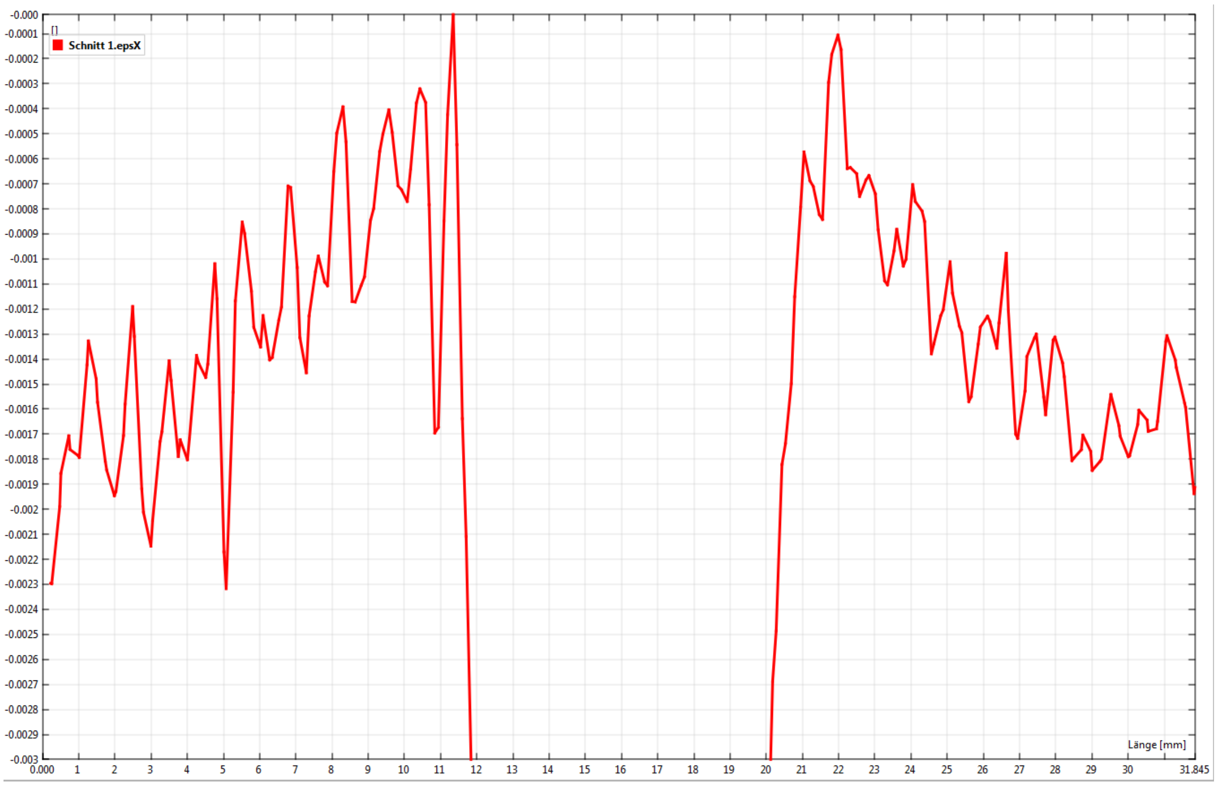


Abbildung A.8: Dehnungen ε_{yy} im Querschnitt eines QI-Laminates; erstellt mit GOM Correlate

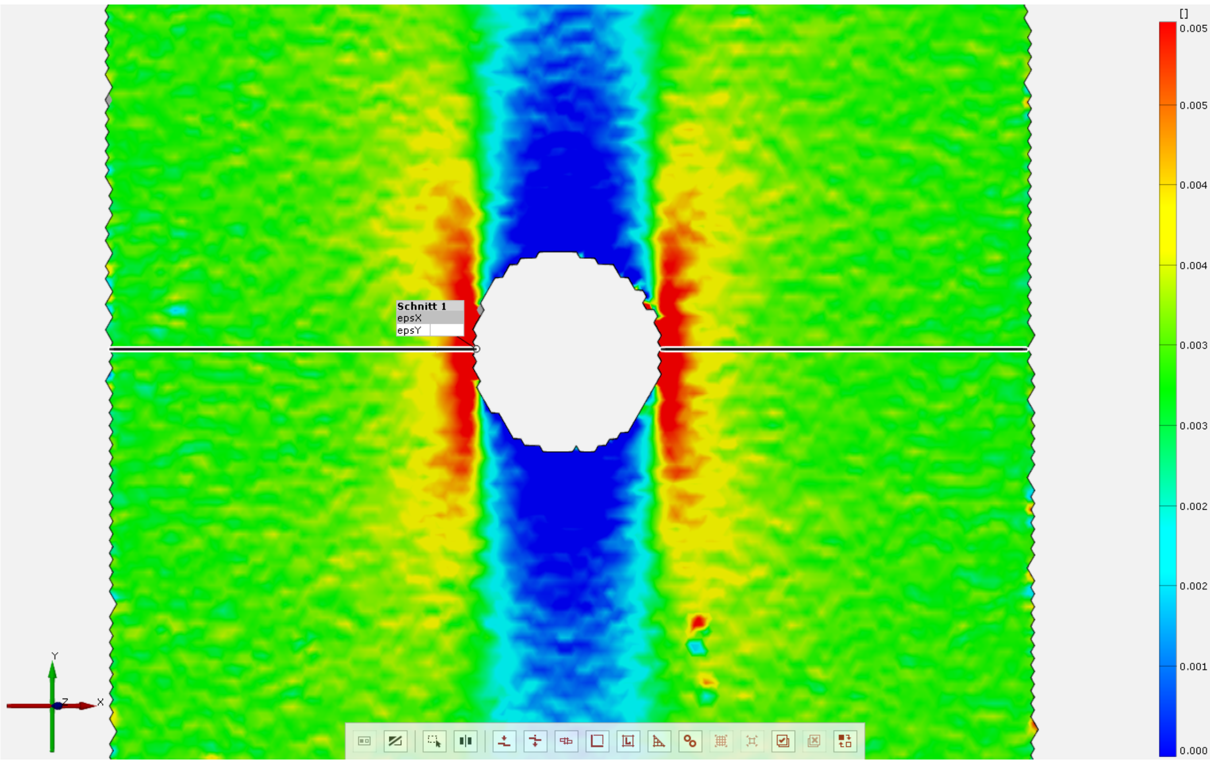


Abbildung A.9: Exemplarischer Querschnitt durch ein 0°-Laminat in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht)

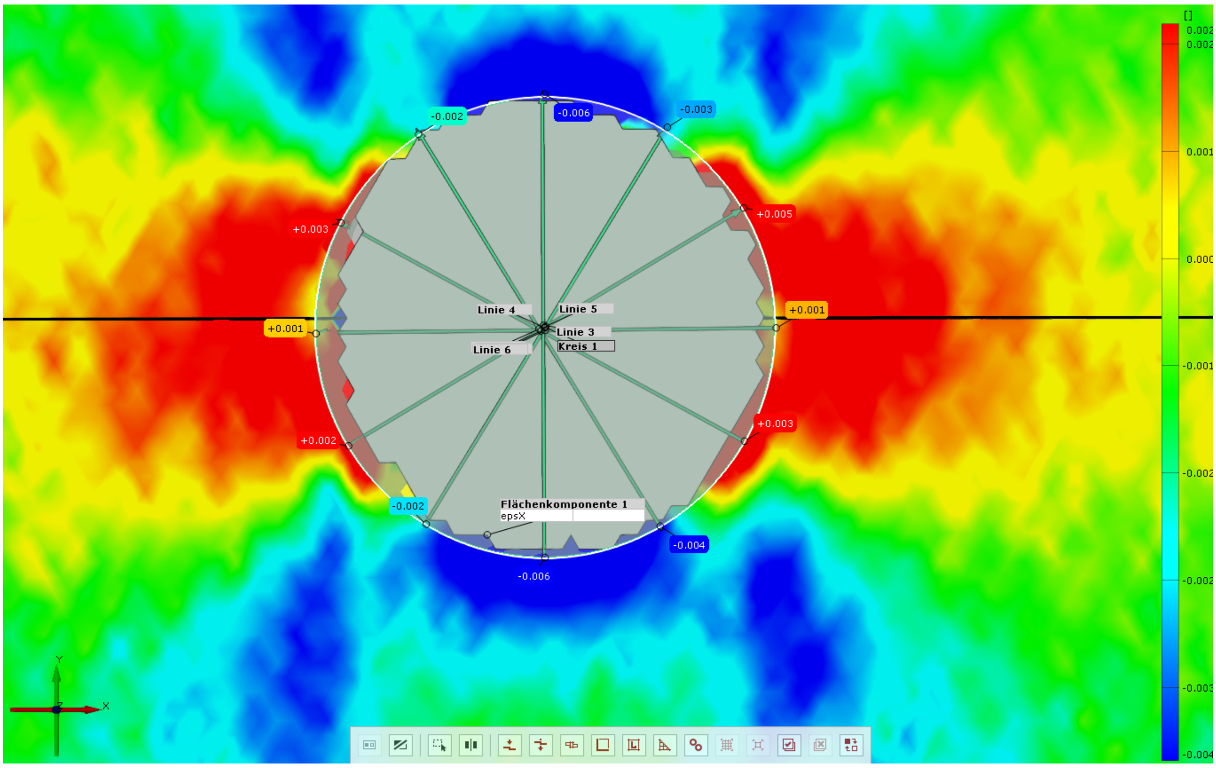


Abbildung A.10: Kreis um die Bohrung eines 0°-Laminates mit Datenpunkten in 30°-Schritten in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht)

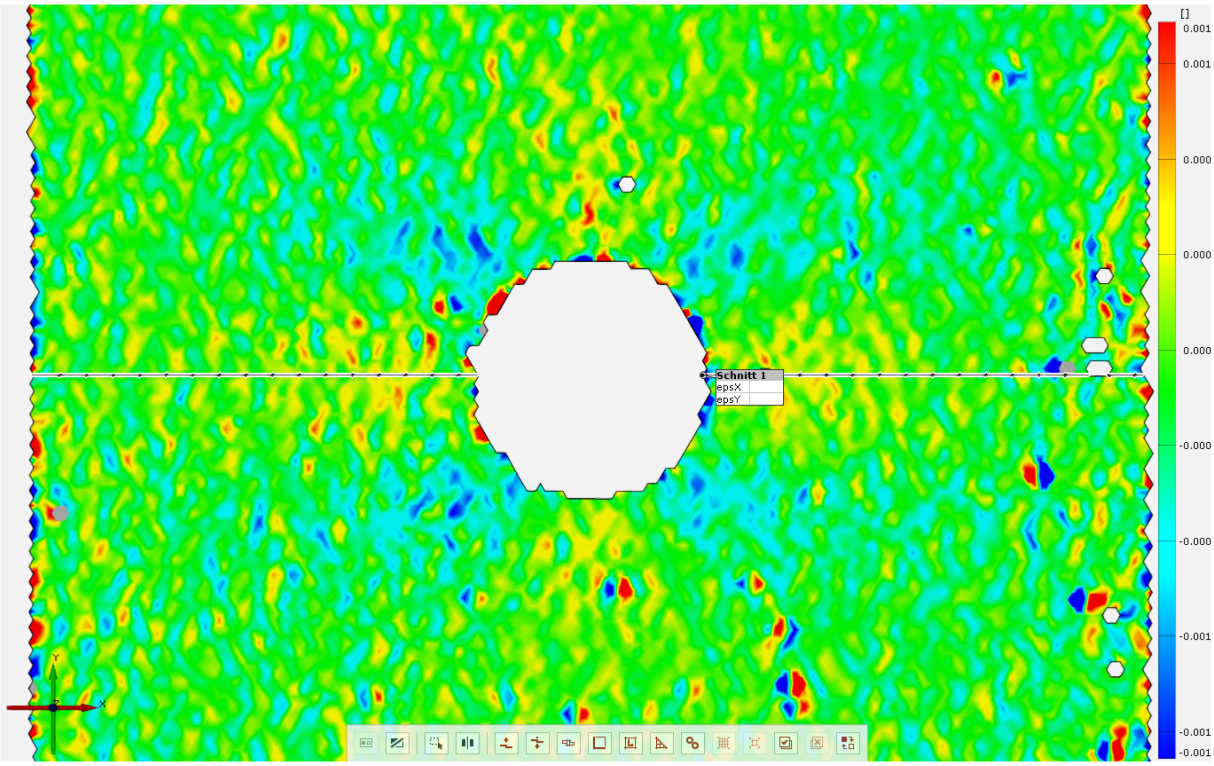


Abbildung A.11: Exemplarischer Querschnitt durch ein 90°-Laminat in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht)

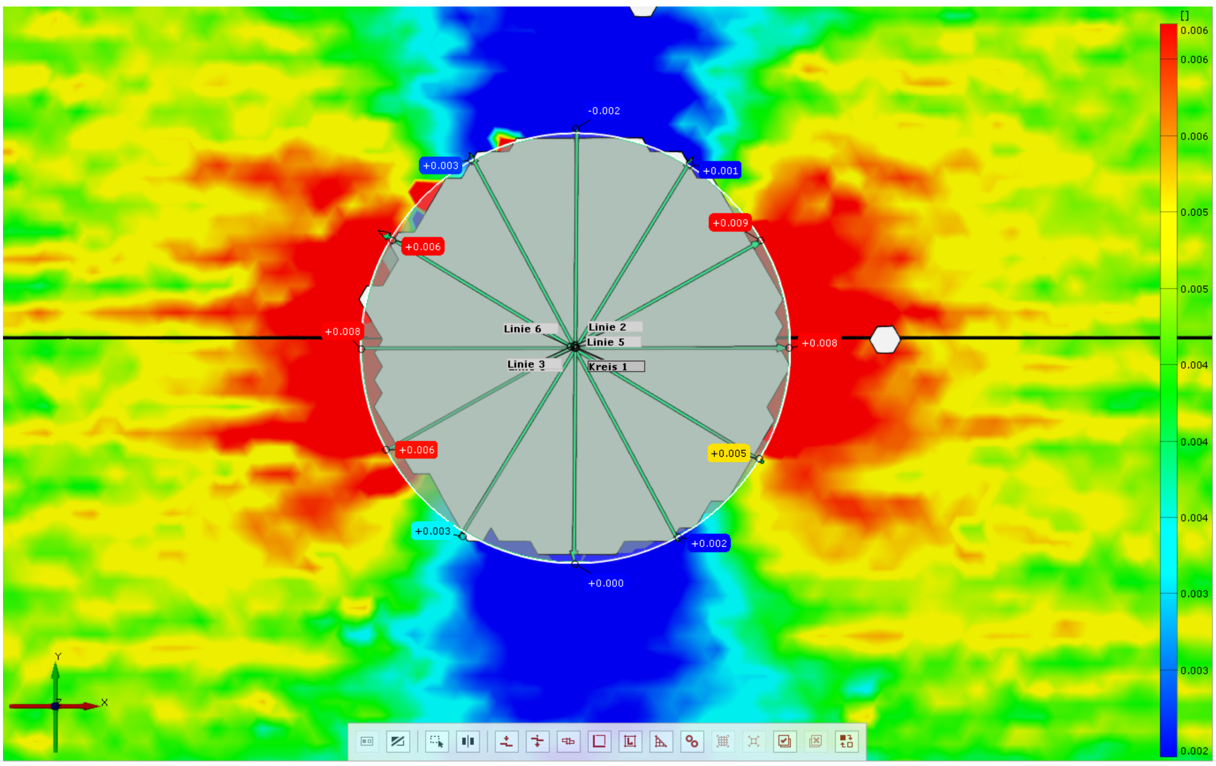


Abbildung A.12: Kreis um die Bohrung eines 90°-Laminates mit Datenpunkten in 30°-Schritten in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht)

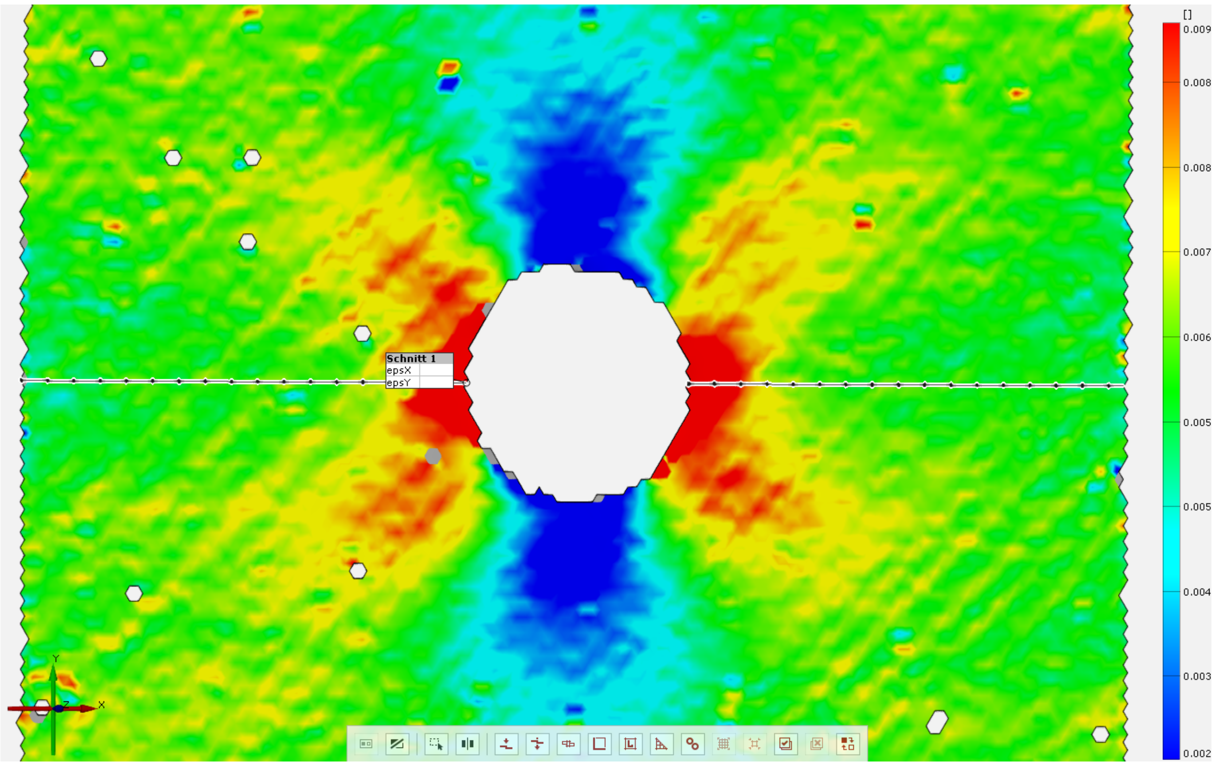


Abbildung A.13: Exemplarischer Querschnitt durch ein QI-Laminat in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht)

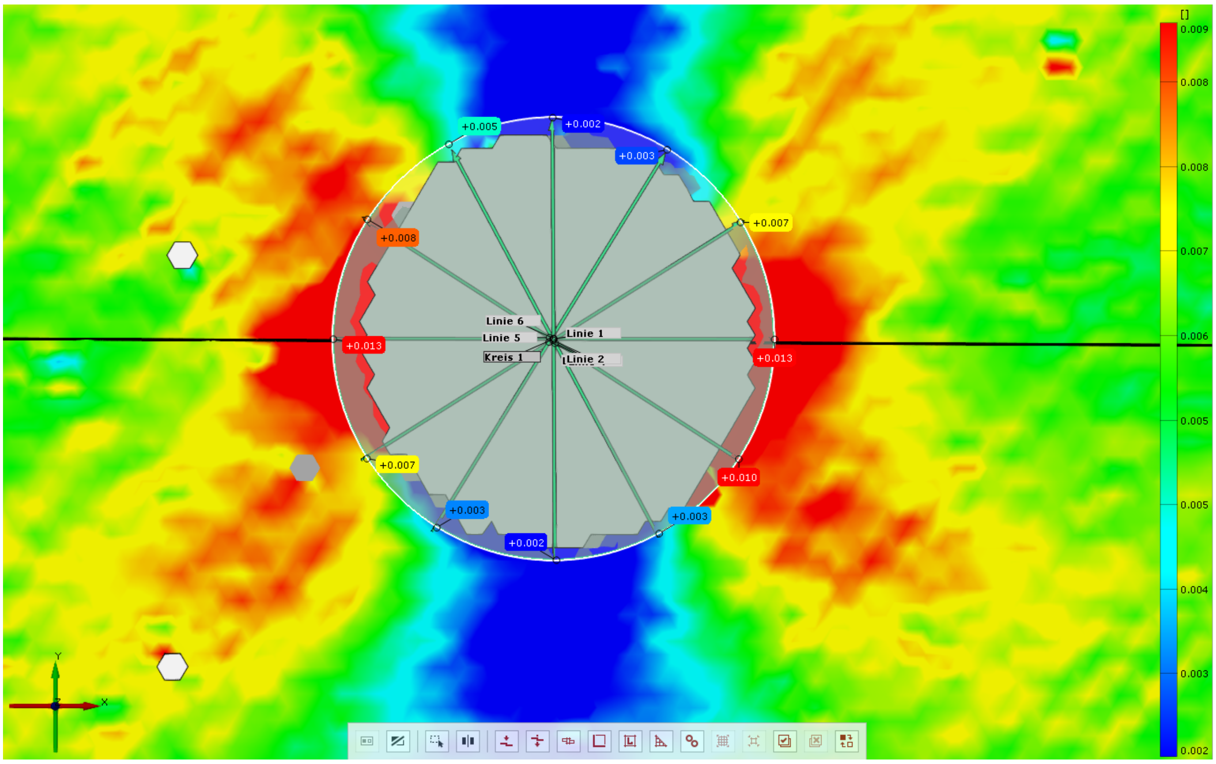


Abbildung A.14: Kreis um die Bohrung eines QI-Laminates mit Datenpunkten in 30°-Schritten in GOM (Zugrichtung nach oben; Koordinatensystem um $\theta = -90°$ gedreht)